из этих прямоугольников равна сумме площадей двух других, то хотя бы одна из осуществляющих разбиение прямых делит квадрат пополам. Докажите это.

б) Квадрат разрезан прямыми, параллельными его сторонам, на прямоугольники, которые раскрашены в синий и красный цвета в

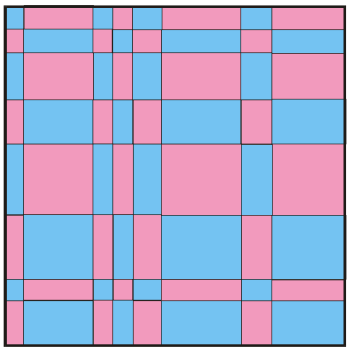

Рис. 9

шахматном порядке (рис.9). Оказалось, что сумма площадей синих прямоугольников равна сумме площадей красных прямоугольников. Докажите, что прямоугольники можно переместить так, что все синие прямоугольники составят один прямоугольник.

(В.Произволов)

13. Разрежьте квадрат размером 12×12 на шесть треугольников, длины всех сторон которых – целые.

(А.Шаповалов)

14*. Из прямоугольника размером 5×8 вырезали 4 клетки (на рисунке

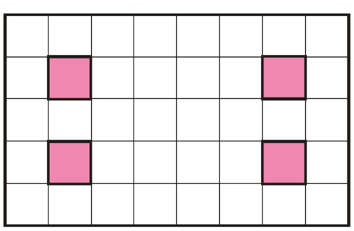

Рис. 10

10 они покрашены красным цветом). Разрежьте полученную фигуру на три части, из которых можно составить квадрат.

(Д.Калинин)

А сейчас займемся делом менее веселым, но более важным.

Теорема 1. *Любой многоугольник, у которого больше трех вершин, можно диагоналями разрезать на треугольники.*

Доказательство – индукция по количеству вершин, основанная на следующей основной лемме. Кому-то лемма может с первого взгляда показаться очевидной. Но, во-первых, не все очевидное верно; во-вторых, даже истинное утверждение не всегда легко доказать.

Лемма. *В любом многоугольнике, у которого больше трех вершин, можно провести диагональ, которая целиком лежит внутри многоугольника.*

Следствие из леммы. *Сумма углов любого n-угольника равна* $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Доказательство следствия – индукция по n.

Доказательство леммы. Введем систему координат так, чтобы абсциссы всех вершин многоугольника были разными. (Другими словами, ось абсцисс не должна быть перпендикулярна ни одной стороне или диагонали многоугольника.) Рассмотрим вершину многоугольника, у которой наибольшая абсцисса. Обозначим ее буквой B, а соседние вершины – буквами A и C (рис.11).

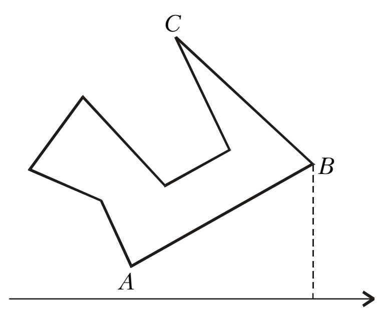

Рис. 11

Если внутри треугольника ABC нет вершин многоугольника, то диагональ AC – искомая. Если же такие вершины есть, то рассмотрим наиболее удаленную от прямой AC. Соединив ее с вершиной B, получим искомую диагональ.

Теперь – еще две задачи.

15 (М544). Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали, целиком лежащей внутри многоугольника, может иметь n-угольник? Решите эту задачу сначала для $n = 4, 5, 6, 7$.

16 (М551). а) Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого пятиугольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка? б) Тот же вопрос для выпуклого n-угольника.

Теорема 2. *Любой многоугольник можно разрезать на части, из которых можно сложить прямоугольник ширины 1.*

Доказательство теоремы 2 вы найдете в конце журнала.

Следствие (теорема Бойяи–Гервина). *Если площади двух многоугольников равны, то любой из них можно разрезать на части, из которых можно сложить второй многоугольник.*

Доказательство теоремы Бойяи–Гервина. Воспользовавшись утверждением теоремы 2, разрежем каждый из многоугольников на части и сложим из них прямоугольники ширины 1 (рис.12). По-

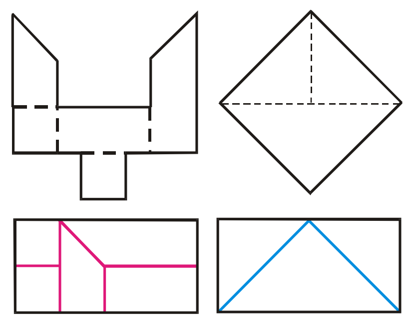

Рис. 12

скольку площади многоугольников равны, то прямоугольники одинаковые. Осталось провести на одном

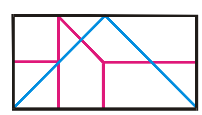

Рис. 13

прямоугольнике обе системы линий разреза (рис.13). Дальнейшее очевидно.

Материал подготовили
А.Жуков, А.Спивак