прямоугольных треугольников INA' и $IA'N'$ получаем $IN \cdot IN' = r^2$, где r – радиус вписанной окружности. Аналогично получаем, что прямая IM перпендикулярна BB', и для точки их пересечения M': $IM \cdot IM' = r^2$. Следовательно, треугольник $IM'N'$ подобен треугольнику INM и вписан в окружность с диаметром IP. Поэтому

$$\angle M'IP + \angle INM = \angle M'N'P + \angle IN'M' = 90^\circ.$$

Это мы и хотели доказать.

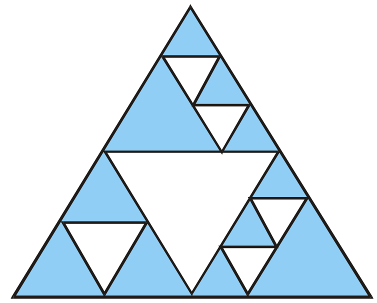
А.Заславский

М1789. *а) Из ста гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 100 г выбирается набор в 50 гирек, общая масса которых равна общей массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 50 г. Докажите, что в наборе найдутся две гирьки, общая масса которых равна 101 г.*
б) Из двухсот гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г выделяется набор в 100 гирек, общая масса которых равна массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 100 г и не дают вместе 201 г. Докажите, что 50 минимальных гирек набора составляют вместе 2525 г.

а) Все 100 гирек можно разбить на пары, в которых массы отличаются на 50 г. Из каждой пары одна гирька попала в набор, другая – осталась вне набора. В силу равновесия тех и других, в набор попали 25 гирек, массы которых не превосходят 50 г, и еще 25 гирек, массы которые превышают 50 г.
Разобьем 100 гирек на новые пары. В каждую пару входят гирьки с общей массой 101 г. Предположим, что только одна гирька из каждой новой пары попала в набор. Тогда, в силу вышеизложенного, 25 гирек набора являлись минимальными в своих парах, а еще 25 – максимальными в своих парах.
Откуда следует (подумайте, почему!), что все нечетные числа от 1 до 99 можно разделить на две группы по 25 штук с равными суммами. Но 25 нечетных чисел не могут давать в сумме четное число 1250.
Значит, найдется пара гирек в наборе с общей массой 101 г.
б) Рассуждая, как в начале предыдущего пункта, мы можем заключить, что масса каждой из 50 минимальных гирек набора не превосходит 100 г, а остальные 50 гирек из набора по массе больше 100 г.
Пусть m – масса какой-либо из 50 минимальных гирек набора. Гирька с массой $m + 100$, по условию, не принадлежат набору. Тогда гирька с массой $101 - m$ обязана принадлежать набору, в противном случае среди оставшихся гирек имелись бы две (с массами $m + 100$ и $101 - m$), общая масса которых 201 г, что невозможно.
Делаем вывод: 50 минимальных гирек набора распадаются на 25 пар, общая масса каждой из которых равна 101 г. Значит, общая масса всех таких гирек 2525 г.

В.Произволов

М1790. *Имеются в некотором количестве равносторонние треугольники, у каждого из которых одна сторона желтая, другая красная, а третья синяя. Можно прикладывать треугольники друг к другу одноцветными сторонами или участками одноцветных сторон. Таким образом составлен большой равносторонний треугольник Δ. Докажите, что суммарная длина участков границы треугольника Δ каждого из трех цветов одна и та же.*

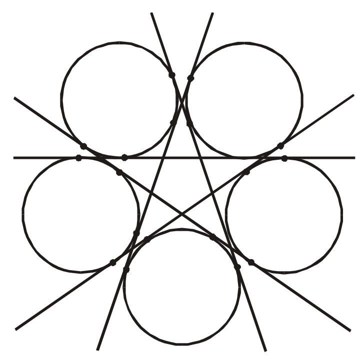


Все треугольники, составляющие равносторонний треугольник Δ, окрасим в серый и белый цвета в шахматном порядке. Пусть при этом треугольники, примыкающие к границе треугольника Δ, имеют серую окраску (см. рисунок).
Совместная граница всех белых и серых треугольников на одну треть окрашена в каждый из трех цветов (желтый, красный или синий), поскольку она является суммарной границей всех белых треугольников.
Вычтя эту границу из суммарной границы всех серых треугольников, получаем границу треугольника Δ. Значит, граница треугольника Δ на одну треть окрашена в каждый из трех цветов.

С.Волченков, В.Произволов

М1791. *а) На плоскости расположены 5 окружностей, любые четыре из которых имеют общую касательную. Обязательно ли все 5 окружностей имеют общую касательную?*
б) На плоскости расположены n окружностей, любые 5 из которых имеют общую касательную. Докажите, что все n окружностей имеют общую касательную.

а) **Ответ:** не обязательно.
На рисунке показаны 5 одинаковых окружностей, центры которых являются вершинами правильного пятиугольника. Каждые четыре из них имеют общую касательную (такие касательные образуют правильную пятиконечную звезду), но все пять, очевидно, общей касательной не имеют.



б) Для разбора базового случая $n = 6$ нам потребуется почти очевидное вспомогательное утверждение.
Лемма. *Пять точек на окружности, каждые четыре из которых являются вершинами какой-либо трапеции, представляют собой вершины правильного пятиугольника.*
Доказательство леммы без труда сводится к тому, что пятиугольник, вписанный в окружность, у которого каждая сторона параллельна какой-либо диагонали, является правильным.
Так как $n = 6$, то найдутся шесть касательных, каждая из которых касается соответствующей пятерки окружностей. Докажем, что среди этих касательных найдутся две совпадающие, а это будет означать, что нашлась общая касательная для всех шести окружностей.
Если предположить на время, что все шесть касатель-