

5 мм и длиной 6 см наполовину погружена в вертикальном положении в большой сосуд с водой. С какой силой нужно удерживать трубку, чтобы она не утонула? Плотность стекла вдвое больше плотности воды. Считать, что стекло полностью смачивается водой, коэффициент поверхностного натяжения воды 0,07 Н/м.

Р.Александров

Ф1821. Плоский конденсатор емкостью C с воздушным диэлектриком состоит из двух больших пластин, расположенных очень близко друг к другу. Одна из пластин не заряжена, другая несет заряд Q . Соединим пластины проводником, имеющим большое сопротивление R . Оцените количество теплоты, которое выделится в проводнике за большое время.

А.Повторов

Ф1822. К источнику переменного напряжения подключили последовательно амперметр и два «черных ящика», в каждом из которых может находиться резистор, конденсатор или катушка индуктивности. Переключили «ящики» из последовательного соединения в параллельное – показание амперметра осталось прежним. Начнем теперь изменять частоту источника – показания амперметра при этом будут вначале уменьшаться, а потом увеличиваться. Во сколько раз нужно изменить частоту, чтобы показания амперметра вернулись к первоначальному значению? Элементы внутри ящиков считайте идеальными.

А.Зильберман

Решения задач М1786–М1795, Ф1803–Ф1807

М1786. На плоскости отмечено шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, причем все попарные расстояния между ними различны. Докажите, что среди треугольников с вершинами в этих точках найдутся два треугольника с общей стороной такой, что для одного эта сторона является наибольшей, а для другого – наименьшей.

Сначала сформулируем и докажем следующую лемму.
Лемма Рамсея. Среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых между собой, либо трое попарно незнакомых.

Вот ее несложное доказательство. Пусть A – один из шести человек. Тогда среди остальных пяти найдутся либо трое с ним знакомых, либо – трое с ним незнакомых. Пусть, например, B, C, D знакомы с A . Если среди них найдутся двое знакомых друг с другом, то вместе с A они образуют тройку попарно знакомых. Если же все трое незнакомы друг с другом, то они дадут искомую тройку попарно незнакомых людей. Аналогично разбирается случай, когда B, C, D не знакомы с A .

Теперь решаем задачу. Все шесть точек соединим всевозможными отрезками. Соединяющий две точки отрезок покрасим красным, если он является наименьшей стороной некоторого треугольника, и синим в противном случае. Так как синий треугольник невозможен, то существует, в силу леммы Рамсея, красный; возьмем его наибольшую сторону. Она и будет

наибольшей в одном и наименьшей в другом треугольниках.

С.Рукишин

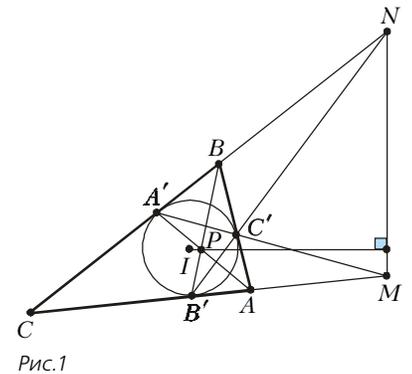
М1787*. Пусть p и q – натуральные числа, большие 1. Известно, что $q^3 - 1$ делится на p , а $p - 1$ делится на q . Докажите, что $p = q^{3/2} + 1$ или $p = q^2 + q + 1$.

Будем рассуждать так.

Имеем $q^3 - 1 = pk$ для некоторого $k \geq 1$. Так как $p \equiv 1 \pmod{q}$, то $k \equiv -1 \pmod{q}$, т.е. $k = lq - 1$ для некоторого $l \geq 1$. Из равенства $p = (q^3 - 1)/(lq - 1)$ следует, что $l < q^2$, а также то, что числа $q^2 - l$ и $q - l^2$ делятся на $lq - 1$. Предположим теперь, что $p \neq q^{3/2} + 1$ (в частности, $l \neq q^{1/2}$). Если $1 < l < q$, $l \neq q^{1/2}$, то $0 < |q - l^2| < lq - 1$ и, следовательно, делимость $q - l^2$ на $lq - 1$ невозможна. Если же $q \leq l < q^2$, то $0 < q^2 - l < lq - 1$ и невозможна делимость $q^2 - l$ на $lq - 1$. Таким образом, $l = 1$ и $p = q^2 + q + 1$. Этим все доказано.

Н.Осипов

М1788. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, A', B', C' – точки ее касания со сторонами BC, CA, AB (рис.1). Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P , AC и $A'C'$ – в точке M , BC и $B'C'$ – в точке N . Докажите, что прямые IP и MN перпендикулярны.



Построим на отрезках IA и IA' как на диаметрах окружности (рис.2). Отличная от I точка N' их пересечения будет основанием перпендикуляра, опущенного из I на AA' , а прямая IN' проходит через N , так как IN' – общая хорда этих двух окружностей, BC – общая касательная первой из них и вписанной окружности треугольника, $B'C'$ – общая хорда второй и вписанной окружностей. Из подобия

