5 мм и длиной 6 см наполовину погружена в вертикальном положении в большой сосуд с водой. С какой силой нужно удерживать трубку, чтобы она не утонула? Плотность стекла вдвое больше плотности воды. Считать, что стекло полностью смачивается водой, коэффициент поверхностного натяжения воды 0,07 Н/м.

Р.Александров

Ф1821. Плоский конденсатор емкостью C с воздушным диэлектриком состоит из двух больших пластин, расположенных очень близко друг к другу. Одна из пластин не заряжена, другая несет заряд Q. Соединим пластины проводником, имеющим большое сопротивление R. Оцените количество теплоты, которое выделится в проводнике за большое время.

А.Повторов

Ф1822. К источнику переменного напряжения подключили последовательно амперметр и два «черных ящика», в каждом из которых может находиться резистор, конденсатор или катушка индуктивности. Переключили «ящики» из последовательного соединения в параллельное – показание амперметра осталось прежним. Начнем теперь изменять частоту источника – показания амперметра при этом будут вначале уменьшаться, а потом увеличиваться. Во сколько раз нужно изменить частоту, чтобы показания амперметра вернулись к первоначальному значению? Элементы внутри ящиков считайте идеальными.

А.Зильберман

Решения задач М1786–М1795, Ф1803–Ф1807

М1786. *На плоскости отмечено шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, причем все попарные расстояния между ними различны. Докажите, что среди треугольников с вершинами в этих точках найдутся два треугольника с общей стороной такой, что для одного эта сторона является наибольшей, а для другого – наименьшей.*

Сначала сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма Рамсея. *Среди любых шести человек найдутся либо трое попарно знакомых между собой, либо трое попарно незнакомых.*

Вот ее несложное доказательство. Пусть A – один из шести человек. Тогда среди остальных пяти найдутся либо трое с ним знакомых, либо – трое с ним незнакомых. Пусть, например, B, C, D знакомы с A. Если среди них найдутся двое знакомых друг с другом, то вместе с A они образуют тройку попарно знакомых. Если же все трое незнакомы друг с другом, то они дадут искомую тройку попарно незнакомых людей. Аналогично разбирается случай, когда B, C, D не знакомы с A.

Теперь решаем задачу. Все шесть точек соединим всевозможными отрезками. Соединяющий две точки отрезок покрасим красным, если он является наименьшей стороной некоторого треугольника, и синим в противном случае. Так как синий треугольник невозможен, то существует, в силу леммы Рамсея, красный; возьмем его наибольшую сторону. Она и будет наибольшей в одном и наименьшей в другом треугольниках.

С.Рукшин

М1787*. *Пусть p и q – натуральные числа, большие 1. Известно, что q^3-1 делится на p, а $p-1$ делится на q. Докажите, что $p=q^{3/2}+1$ или $p=q^2+q+1$.*

Будем рассуждать так.

Имеем $q^3-1=pk$ для некоторого $k\ge 1$. Так как $p\equiv 1(\mathrm{mod}\,q)$, то $k\equiv -1(\mathrm{mod}\,q)$, т.е. $k=lq-1$ для некоторого $l\ge 1$. Из равенства $p=\left(q^3-1\right)/(lq-1)$ следует, что $l<q^2$, а также то, что числа q^2-l и $q-l^2$ делятся на $lq-1$. Предположим теперь, что $p\ne q^{3/2}+1$ (в частности, $l\ne q^{1/2}$). Если $1<l<q$, $l\ne q^{1/2}$, то $0<\left|q-l^2\right|<lq-1$ и, следовательно, делимость $q-l^2$ на $lq-1$ невозможна. Если же $q\le l<q^2$, то $0<q^2-l<lq-1$ и невозможна делимость q^2-l на $lq-1$. Таким образом, $l=1$ и $p=q^2+q+1$. Этим все доказано.

Н.Осипов

М1788. *В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, A',B',C' – точки ее касания со сторонами BC, CA, AB (рис.1). Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P, AC и $A'C'$ – в точке M, BC и $B'C'$ – в точке N. Докажите, что прямые IP и MN перпендикулярны.*

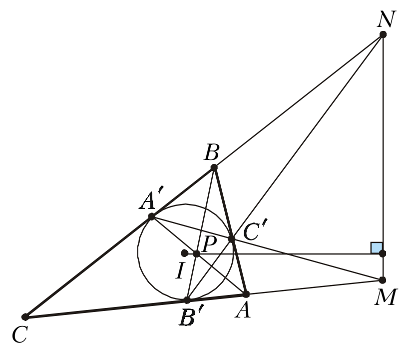

Рис.1

Построим на отрезках IA и IA' как на диаметрах окружности (рис.2). Отличная от I точка N' их пересечения будет основанием перпендикуляра, опущенного из I на AA', а прямая IN' проходит через N, так как IN' – общая хорда этих двух окружностей, BC – общая касательная первой из них и вписанной окружности треугольника, $B'C'$ – общая хорда второй и вписанной окружностей. Из подобия

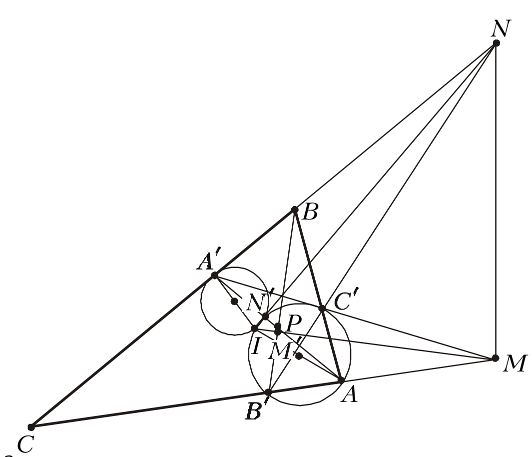

Рис.2