

– Тогда ясно, что каждая вершина N-мерного куба соединяется главной диагональю только с одной вершиной! Например, $(0,0,\dots,0)$ с $(1,1,\dots,1)$, $(0,0,\dots,1)$ с $(1,1,\dots,0)$, и т.д.

– Совершенно верно. Теперь сформулируем общую задачу: если в N-мерном кубе все вершины соединены между собой ребрами и диагоналями (за исключением главных), то каково сопротивление такого каркаса между различными вершинами?

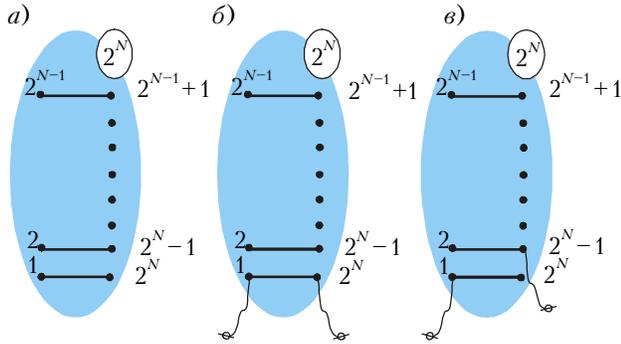


Рис.11. Всего-навсего N-мерный куб без главных диагоналей

На рисунке 11,а изображен N-мерный куб с исключенными главными диагоналями. В зависимости от того, как мы подключим вход и выход, у нас может получиться либо вакуум с частицами и переключкой (рис.11,б), где вход и выход лежат на главной диагонали, либо вакуум с частицами и двумя элементарными растениями (рис.11,в). Для каждого случая ответ нам уже известен:

$$\sigma_1 = \frac{n-2}{2} \sigma_0 = (2^{N-1} - 1) \sigma_0$$

и

$$\sigma_2 = \frac{n(n-2)}{2(n-1)} \sigma_0 = \frac{2^N(2^{N-1} - 1)}{2^N - 1} \sigma_0.$$

Для предложенной вам на олимпиаде задачи про трехмерный кубик эти ответы переходят в следующие: сопротивление между вершинами, лежащими на главной диагонали, равно $\frac{R}{3}$; между любыми другими вершинами – $\frac{7}{24} R$.

Итак, наше исследование закончено. Вполне возможно, что проницательный читатель давно заметил, что многие из рассмотренных выше задач можно было бы решить обычными школьными методами. Но будем надеяться, что и метод старого узла найдет свое место в вашем арсенале.

Приложение

Правило старого узла нам будет удобно получить, исходя из принципа минимума для электрических схем, который можно сформулировать следующим образом: при заданном напряжении на входе и выходе потенциалы в узлах цепи принимают такие значения, чтобы тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, была минимальной.

Теперь представим этот принцип в виде математического утверждения. Пусть потенциалы i-го и k-го узлов равны φ_i и φ_k (если к входу и выходу цепи приложено заданное

внешнее напряжение U , то $\varphi_1 = U$, $\varphi_2 = 0$). Тогда сила тока, текущего по соединяющему их проводнику, согласно закону Ома, равна

$$I_{i,k} = \sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k),$$

а выделяющаяся в нем тепловая мощность –

$$P_{i,k} = \sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2.$$

Полная тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, равна

$$P(\varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2. \quad (1)$$

(Множитель 1/2 введен в этой формуле для удобства записи области суммирования.)

Итак, согласно нашему принципу, потенциалы φ_i внутренних узлов должны быть такими, чтобы величина тепловыделения была минимальной. Это условие позволяет определить потенциал n-го узла φ_n через потенциалы всех остальных узлов. Выделяя в выражении для тепловой мощности слагаемые, содержащие φ_n , получим

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} \sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,k}(\varphi_n - \varphi_i)^2. \quad (2)$$

Вклад потенциала φ_n квадратичный:

$$\varphi_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,n} - 2\varphi_n \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,k} \varphi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,k} \varphi_i^2.$$

Значение φ_n , минимизирующее этот вклад, равно

$$\varphi_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{k,n} \varphi_k}{\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{k,n}}.$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим, что оставшиеся потенциалы должны минимизировать выражение

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} \sigma_{k,n}(\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{i,n} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{k,n} \varphi_k}{\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_{k,n}} - \varphi_i \right)^2.$$

Если немного повозиться с этим выражением, то его можно представить в виде

$$P = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n-1} \left(\sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n} \sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \dots + \sigma_{n-1,n}} \right) (\varphi_i - \varphi_k)^2.$$

Сравним с выражением (1). Получается, что тепловая мощность, выделяющаяся в исходной цепи, равна тепловой мощности в цепи, состоящей из $(n-1)$ узлов, которые связаны между собой проводниками с проводимостями

$$\sigma'_{i,k} = \sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n} \sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \dots + \sigma_{n-1,n}}.$$

Но если и мощности, и приложенные напряжения в обоих случаях одинаковы, то и сопротивления обеих схем равны.

Это и есть правило старого узла, позволяющее заменить исходную схему схемой с меньшим количеством узлов.