– Тогда ясно, что каждая вершина N-мерного куба соединяется главной диагональю только с одной вершиной! Например, (0,0,…,0) с (1,1,…,1), (0,0,…,1) с (1,1,…,0), и т.д.

– Совершенно верно. Теперь сформулируем общую задачу: если в N-мерном кубе все вершины соединены между собой ребрами и диагоналями (за исключением главных), то каково сопротивление такого каркаса между различными вершинами?

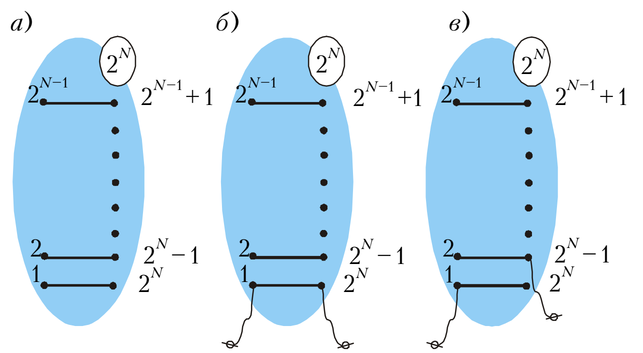

Рис.11. Всего-навсего N-мерный куб без главных диагоналей

На рисунке 11,*а* изображен N-мерный куб с исключенными главными диагоналями. В зависимости от того, как мы подключим вход и выход, у нас может получиться либо вакуум с частицами и перемычкой (рис.11,*б*), где вход и выход лежат на главной диагонали, либо вакуум с частицами и двумя элементарными растениями (рис.11,*в*). Для каждого случая ответ нам уже известен:

$$\sigma_1 = \frac{n-2}{2}\sigma_0 = \left(2^{N-1}-1\right)\sigma_0$$

и

$$\sigma_2 = \frac{n(n-2)}{2(n-1)}\sigma_0 = \frac{2^N\left(2^{N-1}-1\right)}{2^N-1}\sigma_0 .$$

Для предложенной вам на олимпиаде задачи про трехмерный кубик эти ответы переходят в следующие: сопротивление между вершинами, лежащими на главной диагонали, равно $\frac{R}{3}$; между любыми другими вершинами – $\frac{7}{24}R$.

Итак, наше исследование закончено. Вполне возможно, что проницательный читатель давно заметил, что многие из рассмотренных выше задач можно было бы решить обычными школьными методами. Но будем надеяться, что и метод старого узла найдет свое место в вашем арсенале.

Приложение

Правило старого узла нам будет удобно получить, исходя из принципа минимума для электрических схем, который можно сформулировать следующим образом: при заданном напряжении на входе и выходе потенциалы в узлах цепи принимают такие значения, чтобы тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, была минимальной.

Теперь представим этот принцип в виде математического утверждения. Пусть потенциалы i-го и k-го узлов равны φ_i и φ_k (если к входу и выходу цепи приложено заданное внешнее напряжение U, то $\varphi_1 = U$, $\varphi_2 = 0$). Тогда сила тока, текущего по соединяющему их проводнику, согласно закону Ома, равна

$$I_{i,k} = \sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k),$$

а выделяющаяся в нем тепловая мощность –

$$P_{i,k} = \sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2 .$$

Полная тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, равна

$$P(\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}\sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2 . \qquad (1)$$

(Множитель 1/2 введен в этой формуле для удобства записи области суммирования.)

Итак, согласно нашему принципу, потенциалы φ_i внутренних узлов должны быть такими, чтобы величина тепловыделения была минимальной. Это условие позволяет определить потенциал n-го узла φ_n через потенциалы всех остальных узлов. Выделяя в выражении для тепловой мощности слагаемые, содержащие φ_n, получим

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\sigma_{i,k}(\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}(\varphi_n - \varphi_i)^2 . \qquad (2)$$

Вклад потенциала φ_n квадратичный:

$$\varphi_n^2\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,n} - 2\varphi_n\sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}\varphi_i + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,k}\varphi_i^2 .$$

Значение φ_n, минимизирующее этот вклад, равно

$$\varphi_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}\varphi_k}{\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}} .$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим, что оставшиеся потенциалы должны минимизировать выражение

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}(\varphi_i - \varphi_k)^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sigma_{i,n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n}\varphi_k \Big/ \sum_{k=1}^{n-1}\sigma_{k,n} - \varphi_i\right)^2 .$$

Если немного повозиться с этим выражением, то его можно представить в виде

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n-1}\left(\sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}}\right)(\varphi_i - \varphi_k)^2 .$$

Сравним с выражением (1). Получается, что тепловая мощность, выделяющаяся в исходной цепи, равна тепловой мощности в цепи, состоящей из $(n-1)$ узла, которые связаны между собой проводниками с проводимостями

$$\sigma'_{i,k} = \sigma_{i,k} + \frac{\sigma_{i,n}\sigma_{k,n}}{\sigma_{1,n} + \ldots + \sigma_{n-1,n}} .$$

Но если и мощности, и приложенные напряжения в обоих случаях одинаковы, то и сопротивления обеих схем равны.

Это и есть правило старого узла, позволяющее заменить исходную схему схемой с меньшим количеством узлов.