Не бревно для шалаша, а шалаш для бревна

Интересно, а если не в шалаш засовывать максимальное бревно, а наоборот, строить шалаш для бревна? Другими словами, поставим задачу: *описать конус вокруг цилиндра высоты 2h и радиуса основания r так, чтобы образующая цилиндра была параллельна плоскости основания конуса, а объем конуса был минимальным.*

Мы приведем только краткий набросок решения, оставив часть вычислений и обоснований читателю. Вспомним выведенные выше формулы, не забыв заменить k на H/R и x на h.

Имеем:

$$2r = H(R-h)/R$$

при $h \in [d;\, R)$, т.е. при

$$h \geq \frac{RH^2}{2R^2+H^2};$$

далее,

$$\left(R+\frac{H}{R}\cdot r\right)^2 = \left(1+\frac{H^2}{R^2}\right)\left(R^2-h^2\right)$$

при $h \leq RH^2/\left(2R^2+H^2\right)$.

В случае равенства $h = d$ имеем

$$2r = \frac{H(R-h)}{R} = H\left(1-\frac{h}{R}\right) = H\left(1-\frac{H^2}{2R^2+H^2}\right) = \frac{2HR^2}{2R^2+H^2};$$

значит,

$$\frac{r}{h} = \frac{HR^2}{RH^2} = \frac{R}{H},$$

так что $R = H\cdot\dfrac{r}{h}$. Тогда, поскольку $h = d$, находим

$$h = \frac{RH^2}{2R^2+H^2} = \frac{H\cdot\frac{r}{h}\cdot H^2}{2H^2\cdot\frac{r^2}{h^2}+H^2} = \frac{Hrh}{2r^2+h^2},$$

откуда

$$H = \frac{2r^2+h^2}{r} = 2r+\frac{h^2}{r}.$$

Итак,

$$R = \begin{cases} \dfrac{hH}{H-2r}, & \text{если } 2r < H \leq 2r+\dfrac{h^2}{r}; \\ \dfrac{H\sqrt{r^2+h^2}}{\sqrt{H^2-2rH-h^2}}, & \text{если } H \geq 2r+\dfrac{h^2}{r}. \end{cases}$$

Утроенный объем конуса равен

$$3V(H) = HR^2.$$

Поэтому надо рассмотреть две функции: $f(H) = \dfrac{H^3h^2}{(H-2r)^2}$ и $g(H) = \dfrac{H^3\left(r^2+h^2\right)}{H^2-2rH-h^2}$. Производная первой из них равна нулю при $H = 3r$. А производная второй обращается в ноль, если

$$H^2 - 4rH - 3h^2 = 0.$$

На основании этого можно получить ответ: минимальный объем конуса равен

$$\frac{9\pi rh^2}{2} \text{ при } h \geq 2r$$

и

$$\frac{\pi\left(r^2+h^2\right)\left(2r+\sqrt{4r^2+3h^2}\right)^3}{6\left(h^2+2r^2+r\sqrt{4r^2+3h^2}\right)} \text{ при } h \leq 2r.$$

Упражнение 19. Рассмотрим конус и впишем в него а) стоячий; б) лежачий цилиндр максимального объема. Верно ли, что для полученного цилиндра исходный конус будет конусом минимального объема (из всех конусов с той же осью и той же плоскостью основания)?

Задачи для размышления

Задача о минимальном объеме конуса решена. Тем не менее, остался ряд нерешенных задач. Если вам удастся решить одну из следующих (или аналогичных им) задач – сообщите об этом в редакцию журнала!

1. Цилиндр объема V расположен в конусе объема W. Верно ли, что $V/W \leq 2/9$?

2. Дан «лежащий на боку» цилиндр, радиус основания которого равен r, а высота – h. Найдите описанный «стоячий» конус, площадь боковой поверхности которого минимальная из возможных.

3. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в цилиндре, радиус основания которого равен r, а высота – h.

4. Найдите максимальный объем конуса, который можно расположить в конусе, радиус основания которого равен r, а высота – h, если требуется, чтобы а) вершина внутреннего конуса лежала в центре основания внешнего конуса; б) одна из образующих внутреннего конуса лежала на основании внешнего конуса.

5. Найдите наибольший радиус круга, который можно разместить в конусе с радиусом основания R и высотой H.