Продифференцируем функцию

$$f(x) = x\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)} - R\right)^2$$

и приравняем производную к нулю:

$$\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)} - R\right)^2 -$$

$$-\,2\frac{x^2\left(1+k^2\right)}{\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}}\left(\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)} - R\right) = 0,$$

откуда

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right) - R\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)} = 2x^2\left(1+k^2\right),$$

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-3x^2\right) = R\sqrt{\left(1+k^2\right)\left(R^2-x^2\right)}, \quad (*)$$

$$\left(1+k^2\right)\left(R^2-3x^2\right)^2 = R^2\left(R^2-x^2\right),$$

$$9\left(k^2+1\right)x^4 - \left(6k^2R^2+5R^2\right)x^2 + k^2R^4 = 0,$$

$$x^2 = R^2\,\frac{6k^2+5\pm\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}.$$

Если в последней формуле взять знак плюс, то вследствие неравенства $\frac{6k^2+5\pm\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)} > \frac{1}{3}$ получаем, что в правой части формулы $(*)$ стоит отрицательное число, а в левой – положительное. Значит, надо брать знак минус.

Как выглядит график функции $V(x)$? Поскольку функция $r(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $(0;\,R)$, в том числе в точке $x = d$, то функция $V(x)$ тоже всюду дифференцируема на интервале $(0;\,R)$. Легко понять, что функция не может иметь график вроде изображенного на рисунке 26, а имеет единственную точку максимума (рис.27). (Впрочем, можно обойтись и без апелляции к рисункам 26 и 27

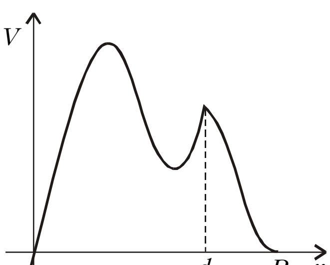

Рис.26

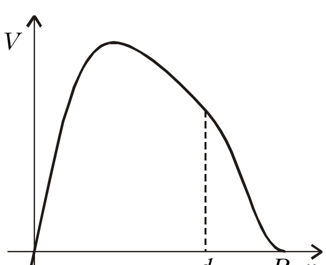

Рис.27

и дифференцируемости функции $V(x)$. А именно, при $k > 1$ имеем $\frac{R}{3} < d$ и, как можно доказать, $R\sqrt{\frac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}} < d$. Поэтому функция $V(x)$ на $(0;\,d)$ имеет единственную точку максимума, а на $[d;\,R)$ монотонно убывает.)

Таким образом, при $k \ge 1$ максимум объема достигается при

$$x = R\sqrt{\frac{6k^2+5-\sqrt{25+24k^2}}{18\left(k^2+1\right)}}.$$

Теперь легко выписать ответ. При $H \le R$ максимальный объем лежачего цилиндра равен $\frac{2}{27}\pi RH^2$, а при $R \le H$ максимальный объем V равен

$$\frac{\pi\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}} - 3\sqrt{2}R\right)^2}{9H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Поскольку

$$12H^2+13R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2} = $$

$$= \frac{\left(\sqrt{24H^2+25R^2}+R\right)^2}{2},$$

последнюю формулу можно упростить:

$$V = \frac{\pi\sqrt{2}R^3\left(\sqrt{24H^2+25R^2} - 5R\right)^2}{18H\sqrt{6H^2+5R^2+R\sqrt{24H^2+25R^2}}}.$$

Задача о лежачем цилиндре решена!

Упражнение 17. Найдите максимально возможный объем, высоту и радиус основания лежачего цилиндра, вписанного в данный стоячий цилиндр, если радиус основания стоячего цилиндра равен R, а высота не меньше $2R\sqrt{2/3}$.

Что лучше – лежать или стоять?

Впишем в данный конус лежачий и стоячий цилиндры максимально возможных объемов. Интересно, какой будет больше?

При $H \le R$ ответ на этот вопрос получить легко:

$$\frac{2}{27}\pi RH^2 \le \frac{2}{27}\pi R^2H = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{27}\pi R^2H,$$

так что объем лежачего бревна как минимум вдвое меньше объема максимального стоячего бревна.

При $H \ge R$ отношение объемов равно

$$\frac{3\sqrt{2}}{8}\,\frac{\left(\sqrt{24k^2+25}-5\right)^2}{k^2\sqrt{6k^2+5+\sqrt{24k^2+25}}},$$

где $k = H/R$.

Упражнение 18. Докажите, что при $H \ge R$ отношение максимальных объемов лежачего и стоячего цилиндров не превосходит $2\sqrt{2}/3$, причем значение $2\sqrt{2}/3$ достигается при $k = \sqrt{6}$.