откуда

$$\frac{x^2}{2} \geq x^8.$$

Значит, $|x| \leq \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$. Дальнейшие рассуждения (при желании) читатель легко проведет самостоятельно. (Полезно рассмотреть график функции $y = x^4 + \frac{1}{4x^2}$, найти точку минимума $x = 1/\sqrt{2}$ и понять, что значениям $x \geq 1/\sqrt{2}$ соответствуют точки локального минимума, а значениям $x < 1/\sqrt{2}$ – точки локального максимума функции $f(x)$.)

Решение задачи о лежачем цилиндре

Тренировка закончена. Пора заняться давно обещанным делом – в данный конус (шалаш) радиуса R и высоты H вписать лежачий цилиндр (бревно) максимального объема. Поместим начало координат в центр основания конуса, а ось Oz направим в вершину конуса. Тогда для любой точки $(x; y; z)$ боковой поверхности конуса имеем:

$$\frac{H}{R} = \frac{H - z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Обозначив $k = H/R$, получаем

$$k^2\left(x^2 + y^2\right) = (H - z)^2.$$

Несложно записать и уравнение окружности радиуса r с центром $(x; 0; r)$, которая ограничивает основание «лежачего» цилиндра:

$$y^2 + (z - r)^2 = r^2,$$

т.е. $y^2 = 2rz - z^2$. Значит, координаты точки пересечения этой окружности с боковой поверхностью конуса удовлетворяют уравнению

$$k^2\left(x^2 + 2rz - z^2\right) = (H - z)^2.$$

Как помните, есть два случая: при достаточно больших x величина r маленькая и окружность касается боковой поверхности конуса в точке $(x; 0; k(R - x))$, а при маленьких x касание происходит не в одной точке, а в двух. Рассмотрим эти случаи по очереди.

В первом случае $2r = k(R - x)$ и

$$V = \pi \cdot 2x \cdot \left(\frac{k(R - x)}{2}\right)^2 = \pi k^2 x (R - x)^2/2.$$

Производную функции $f(x) = x(R - x)^2$ мы уже вычисляли. И нулю ее уже приравнивали. Поэтому мы знаем, что функция f на интервале $(0; R)$ имеет максимум в точке $R/3$. Если при $x = R/3$ окружность касается боковой поверхности конуса в одной точке, то *среди всех лежачих цилиндров* максимальный объем имеет тот, высота которого равна $2x = 2R/3$, радиус основания равен $r = H/3$, а объем равен

$$V = 2\pi H^2 R/27.$$

Обратите особое внимание на слова «среди всех лежачих цилиндров». Не среди «всех цилиндров первого случая», а среди всех! Дело в том, что и в первом, и во втором случае $r \leq k(R - x)/2$ и поэтому $V \leq \pi k^2 x (R - x)^2/2$. (Обдумайте это!)

А если при $x = R/3$ окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, то мы вынуждены разбирать второй случай. Уравнение

$$k^2\left(x^2 + 2rz - z^2\right) = (H - z)^2$$

можно записать в виде

$$z^2\left(1 + k^2\right) - 2\left(H + rk^2\right)z + \left(H^2 - k^2x^2\right) = 0.$$

Окружность касается боковой поверхности, когда это квадратное уравнение имеет кратный корень, т.е. когда его дискриминант D равен нулю. (Подумайте, почему!) Итак,

$$\frac{D}{4} = \left(kR + k^2 r\right)^2 - \left(1 + k^2\right)\left(k^2R^2 - k^2x^2\right) = 0,$$

откуда

$$(R + kr)^2 = \left(1 + k^2\right)\left(R^2 - x^2\right)$$

и, следовательно,

$$r = \frac{\sqrt{\left(1 + k^2\right)\left(R^2 - x^2\right)} - R}{k}.$$

Если дискриминант уравнения равен нулю, то найти его корень легко: $z = \left(H + rk^2\right)/\left(1 + k^2\right)$. Разумеется, должно быть выполнено неравенство $0 \leq y^2 = 2rz - z^2$, т.е. $z \leq 2r$. Подставив в это неравенство только что найденные значения z и r и поупражнявшись в алгебраических преобразованиях, получим в конце концов

$$x \leq \frac{k^2 R}{2 + k^2}.$$

Обозначив для краткости $d = k^2R/\left(2 + k^2\right)$, мы видим, что при $x \in [d, R)$ окружность касается боковой поверхности конуса одной точкой, а при $x \in (0; d)$ – двумя. Неравенство

$$d \leq \frac{R}{3}$$

выполнено, как легко проверить, при $k \leq 1$. Поэтому мы уже нашли ответ ($V = 2\pi H^2 R/27$) при $k \leq 1$ (т.е. при $H \leq R$).

Осталось разобрать случай $k > 1$. Когда окружность касается боковой поверхности конуса в двух точках, объем цилиндра равен

$$V = 2\pi x \left(\frac{\sqrt{\left(1 + k^2\right)\left(R^2 - x^2\right)} - R}{k}\right)^2.$$