т.е. $y = \dfrac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi$. Аналогично, $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi$. (Проверьте это!)

Итак, мы нашли огибающую:

$$(x;\, y) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi;\, \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi\right).$$

Легко убедиться, что кривая, заданная этим параметрическим уравнением, может быть задана уравнением без параметра:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}.$$

Эту кривую тоже называют астроидой.

Упражнения

13. Докажите, что прямая, заданная уравнением $yb\cos\varphi - xa\sin\varphi = \left(b^2 - a^2\right)\sin\varphi\cos\varphi$, касается в точке $\left(\dfrac{a^2 - b^2}{a}\cos^3\varphi;\, \dfrac{b^2 - a^2}{b}\sin^3\varphi\right)$ кривой, заданной уравнением $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}$.

14. Если $a^2 \neq b^2$, то из точек астроиды $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = \left(b^2 - a^2\right)^{2/3}$, кроме вершин четырех ее «клювов», к эллипсу можно провести три перпендикуляра, из точек внешней области и из вершин «клювов» – два, а из точек внутренней области – четыре перпендикуляра. Докажите это.

15. Нарисуйте, как выглядит огибающая семейства нормалей к гиперболе, заданной уравнением $xy = 1$.

16. Огибающей для семейства нормалей к циклоиде – кривой, заданной параметрически формулами $x = \pi rt - r\sin t$ и $y = r - r\cos t$, где $r > 0$, – является циклоида, сдвинутая на $2r$ вниз и на πr вправо. Докажите это.

Вишенка в бокале

Завершит подготовку к решению задачи о максицилиндре задача, которую в 1994 году предложил Н.Б.Васильев одиннадцатиклассникам – участникам Московской математической олимпиады:

Задача. *Вишенка имеет форму шара радиуса r. Внутренняя поверхность бокала получена вращением кривой $z = x^4$ вокруг оси аппликат. Найдите наибольшее возможное r, при котором вишенка может лежать в бокале и касаться его поверхности в начале координат.*

Решение. Рассмотрим плоскую задачу. Запишем уравнение окружности радиуса r с центром в точке $(0;\, r)$:

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2,$$

т.е. $x^2 - 2ry + y^2 = 0$. Эта окружность и график $y = x^4$ должны иметь лишь одну общую точку – начало координат. Подставим значение y в уравнение:

$$x^2 - 2rx^4 + x^8 = 0.$$

Значит, $x = 0$ или

$$x^6 - 2rx^2 + 1 = 0.$$

Значению $x = 0$ соответствует начало координат. Чтобы вишенка касалась дна бокала, последнее уравнение не должно иметь корней. (Разберитесь в этом самостоятельно!) Записав его в виде

$$r = \frac{x^6 + 1}{2x^2}$$

и построив график функции $y = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{2x^2}$ (рис.25), видим, что задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции. Дифференцируем:

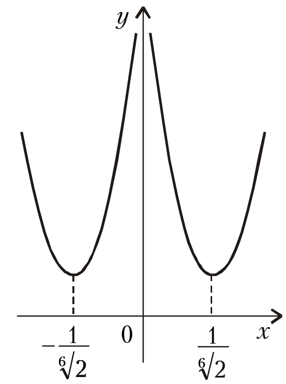

Рис.25

$$\left(\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2x^2}\right)' = 2x^3 - \frac{1}{x^3},$$

так что производная обращается в ноль в точках $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$; наименьшее значение функции равно

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^6 + 1}{2\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}.$$

Это и есть максимальный радиус вишенки.

Есть и другой способ решения задачи о вишенке. Для положительного числа r рассмотрим квадрат расстояния от точки $(0;\, r)$ до точки $\left(x;\, x^4\right)$ и продифференцируем полученную функцию:

$$f(x) = x^2 + \left(x^4 - r\right)^2,$$

$$f'(x) = 2x + 8x^3\left(x^4 - r\right).$$

Производная равна нулю, если $x = 0$ или

$$4x^6 - 4rx^2 + 1 = 0.$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$r = x^4 + \frac{1}{4x^2}.$$

Чтобы вишенка помещалась в бокал, должно быть выполнено неравенство

$$f(x) \geq r^2,$$

т.е.

$$x^2 + \left(x^4 - \left(x^4 + \frac{1}{4x^2}\right)\right)^2 \geq \left(x^4 + \frac{1}{4x^2}\right)^2.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2 + \frac{1}{16x^4} \geq x^8 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16x^4},$$