

# Бревно в шалаше

К. ОСИПЕНКО, А. СПИВАК, В. ТИХОМИРОВ

**В** ПРЕДЫДУЩЕМ НОМЕРЕ ЖУРНАЛА ТЕЧЕНИЕ этой статьи прервалось в том месте, где было выведено уравнение астроиды:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 1.$$

Вот несколько упражнений.

## Упражнения

**9.** Найдите длину кратчайшего отрезка с концами на осях координат, проходящего через точку  $(a; b)$ , где  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ .

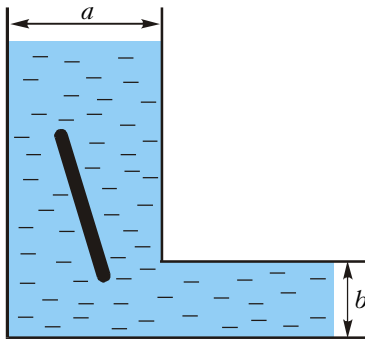


Рис.22

этого бревна длины  $d$ ? При каких  $d$  через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины  $d$ ?

**10.** Канал, берега которого – параллельные прямые, поворачивает под прямым углом, причем до поворота его ширина равна  $a$ , после поворота –  $b$  (рис.22). При каких  $d$  через такой поворот может проплыть тонкое бревно длины  $d$ ?

**11.** Рассмотрим круг диаметра 1, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2. Нарисуем траекторию какой-то точки катящейся окружности (рис.23). Докажите, что получится астроида.

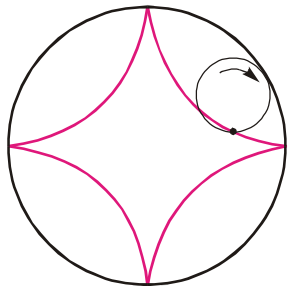


Рис.23

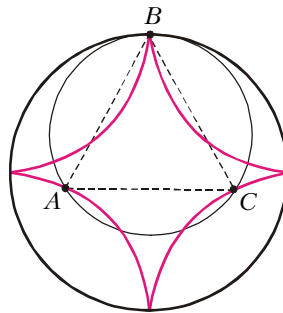


Рис.24

**12.** Рассмотрим равносторонний треугольник  $ABC$ , вписанный в круг диаметра 3, катящийся без проскальзывания изнутри по окружности радиуса 2 (рис.24). Докажите, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  движутся по одной и той же кривой – астроиде.

## Нормали к эллипсу

Очень красива огибающая для семейства нормалей к эллипсу. Эллипс, как известно, можно задать уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Нормаль к эллипсу найти легко, если эллипс задать

параметрически:

$$(x; y) = (a \cos \varphi; b \sin \varphi).$$

(Это аналогично тому, как единичную окружность можно задать и уравнением  $x^2 + y^2 = 1$ , и параметрически:  $(x; y) = (\cos \varphi; \sin \varphi)$ . Обдумайте это, если вы не встречались с этим раньше!)

Итак,  $x$  и  $y$  – функции параметра  $\varphi$ . Вычислим производные:  $(x'; y') = (-a \sin \varphi; b \cos \varphi)$ . Если отложить вектор с такими координатами от точки  $(x; y)$ , то получим вектор, касающийся эллипса. (Как всякий вектор скорости, сказал бы физик.)

Легко проверить, что если вектор  $(\alpha; \beta)$  отличен от нулевого вектора и перпендикулярен прямой  $l$ , проходящей через точку с координатами  $(m; n)$ , то прямую  $l$  можно задать уравнением  $\alpha x + \beta y = \alpha m + \beta n$ . (Докажите это!)

Поэтому уравнение нормали можно записать в виде

$$yb \cos \varphi - xa \sin \varphi = (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Теперь мы рассмотрим близкую к  $\varphi$  величину  $\psi$  (чтобы в конце концов перейти к пределу  $\psi \rightarrow \varphi$ ) и составим систему уравнений

$$\begin{cases} yb \cos \varphi - xa \sin \varphi = (b^2 - a^2) \sin \varphi \cos \varphi, \\ yb \cos \psi - xa \sin \psi = (b^2 - a^2) \sin \psi \cos \psi. \end{cases}$$

Домножив первое уравнение на  $\sin \psi$ , второе – на  $\sin \varphi$  и вычтя первое уравнение из второго, получим

$$yb(\cos \psi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \psi) =$$

$$= (a^2 - b^2)(\sin \varphi \cos \varphi \sin \psi - \sin \psi \cos \psi \sin \varphi),$$

откуда

$$yb \sin(\varphi - \psi) = (a^2 - b^2) \sin \varphi \sin \psi (\cos \varphi - \cos \psi).$$

Чтобы удобнее было перейти к пределу, перепишем это равенство следующим образом:

$$y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin \varphi \sin \psi \frac{\cos \varphi - \cos \psi}{\varphi - \psi} \cdot \frac{\varphi - \psi}{\sin(\varphi - \psi)}.$$

Последний множитель стремится к 1 (это так называемый первый замечательный предел). Предпоследний множитель стремится к производной косинуса в точке  $\varphi$ . Значит, в пределе (при  $\psi \rightarrow \varphi$ ) получаем

$$y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^2 \varphi (-\sin \varphi),$$