Задачи заочного тура олимпиады

Физика

1. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно вертикально вверх, другое под углом $\theta = 60^\circ$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела равна $v_0 = 25$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите расстояние между телами через $\tau = 1{,}7$ с. (10 баллов)

2. Под каким углом к горизонту надо бросить тело массой M, чтобы максимальная высота его подъема равнялась дальности полета, если на тело действует с постоянной силой F горизонтальный попутный ветер? Ускорение свободного падения равно g. (10 баллов)

3. На столе лежит доска массой M, на одном конце которой находится брусок массой m. Бруску сообщают скорость v_0 вдоль доски. Какое время вся система будет находиться в движении, если коэффициент трения между доской и бруском μ_1, а между доской и столом μ_2? (10 баллов)

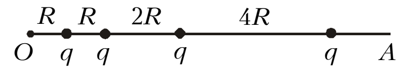
4. Температура одного моля идеального одноатомного газа меняется по закону $T = aV^2$. Найдите теплоемкость газа в этом процессе. Универсальная газовая постоянная равна R. (10 баллов)

5. В цилиндре под поршнем находится воздух при температуре $t_1 = 100$ °С, имеющий относительную влажность $\varphi = 40\%$. Во сколько раз следует изменить объем воздуха, чтобы при его охлаждении до температуры $t_2 = 20$ °С на стенках сосуда выпала роса? Нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, давление насыщенного водяного пара при температуре 20 °С $p_н = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па. (10 баллов)

6. В двухэлектродной лампе напряжение между плоскими электродами составляет 22 кВ. Электроны ударяют об анод с общей силой 1 мкН. Удары неупругие. Какой силы ток течет через лампу? Отношение заряда электрона к его массе равно $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. (10 баллов)

7. Пучок протонов влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Протоны движутся по дуге окружности радиусом 20 см и попадают на заземленную мишень. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в мишени, если сила тока в пучке 0,1 мА. Отношение заряда протона к его массе равно $0{,}96 \cdot 10^8$ Кл/кг. (10 баллов)

8. На луче OA (см. рисунок) расположено бесконечное множество точечных зарядов величиной q так, что расстояние между очередными двумя соседними зарядами удваивается. Определите потенциал поля в точке O (начало луча), где заряда нет, а до первого заряда расстояние равно R. Электрическая постоянная равна ε_0. (10 баллов)



9. В области пространства, где имеются одновременно однородное магнитное поле с индукцией B = 0,2 Тл и однородное электрическое поле с напряженностью E, движется электрический заряд. Известно, что в тот момент времени, когда скорость заряда равна v = 500 м/с и направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции, ускорение заряда равно нулю. Пренебрегая силой тяжести, определите величину напряженности электрического поля. (10 баллов)

10. Непрерывное излучение лазера мощностью 600 Вт продолжалось 20 мс. Излученный свет попал на кусочек идеально отражающей фольги массой 2 мг, расположенный перпендикулярно направлению распространения света. Какую скорость приобрел кусочек фольги? (10 баллов)

Математика

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x+5} < \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}. \text{ (20 баллов)}$$

2. Проверьте справедливость равенства

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg}\frac{2}{11}. \text{ (20 баллов)}$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}. \text{ (10 баллов)}$$

4. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки *2*, *3*, *4* и *5*. Сумма полученных оценок равна 93, причем оценок *3* больше, чем пятерок, но меньше, чем оценок *4*. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число оценок *5* было четным. Определите, сколько каких оценок получила группа. (25 баллов)

5. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 30° проведена высота CD из вершины прямого угла C. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, если меньший катет треугольника ABC равен 1. (25 баллов)

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №4 за 2001 г.)

1. Преобразовав выражение в правой части исходного тождества к виду

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3bc^2 + 3b^2c - 18abc \text{ A},$$

запишем разность между правой и левой его частями:

$$3\left(ab^2 + ac^2 + a^2b + a^2c + bc^2 + b^2c - 6abc\right) = 0.$$

Последнее равенство равносильно тождеству

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = 0.$$

Поскольку числа a, b, c положительны, то это равенство возможно лишь в одном единственном случае: $a = b = c$.

2. Для произвольных точек A, B, C, D, E, F, K плоскости справедливы векторные равенства

$$\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DK} + \vec{KF}, \quad \vec{CE} = \vec{BE} - \vec{BC}.$$

Учитывая, что для параллелограммов $ABCD$ и $CEFK$ справедливы равенства

$$\vec{KF} = \vec{CE}, \quad \vec{AD} = \vec{BC},$$

выводим

$$\vec{AF} = \vec{DK} + \vec{BE}.\text{A}$$

По условию $\vec{DK} \| \vec{BE}$, поэтому $\vec{AF} \| \vec{DK}$, $\vec{AF} \| \vec{BE}$. Векторы $\vec{DK}$ и $\vec{BE}$ могут быть сонаправлены (рис.1) или противоположно направлены (рис.2). В первом случае $|\vec{AF}| = |\vec{BE}| + |\vec{DK}| = a + b$; во втором случае $|\vec{AF}| = a - b$ или $|\vec{AF}| = b - a$ в зависимости от того, какой из векторов $\vec{BE}$ или $\vec{DK}$ длиннее.

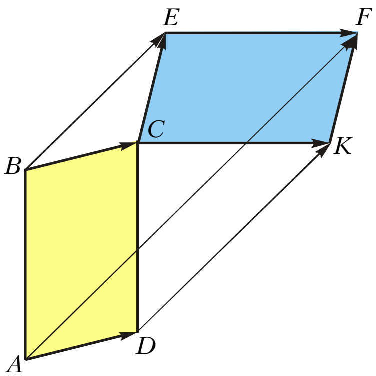


Рис. 1

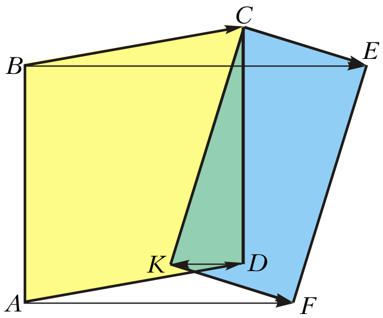


Рис. 2

3. а) Верно. Пусть x – наименьшее, а X – наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. При указанном в условии задачи преобразовании числа x и X могут перейти либо сами в себя (при $a > 0$), либо друг в друга (при $a < 0$). В первом случае из равенств

$$\begin{cases} x = ax + b, \\ X = aX + b \end{cases}$$

находим $a = 1$;

во втором – из равенств

$$\begin{cases} X = ax + b, \\ x = aX + b \end{cases}$$

находим $a = -1$.

б) Неверно. Для доказательства достаточно, например, рассмотреть преобразование с параметрами $a = -1$ и $b = 11$ десяти натуральных чисел 1, 2, ..., 10.

4. Нет.

Докажем это методом «от противного». Допустим, такая расстановка возможна. Пронумеруем вертикали слева направо, а горизонтали – снизу вверх. Рассмотрим различные варианты.

1) На первой горизонтали – 1 пешка. Тогда на второй горизонтали – 3 пешки. На третьей горизонтали должно быть либо в 3 раза больше, либо в 3 раза меньше пешек, чем на второй, т.е. либо 9, либо 1. Так как в каждой горизонтали 8 клеток, то первое невозможно, поэтому на третьей горизонтали стоит 1 пешка. Далее, рассуждая так же, получаем, что на четвертой горизонтали стоят снова 3 пешки, на пятой – опять одна и т.д. Тогда суммарное число пешек на доске равно 1 + + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 + 1 + 3 = 16.

Если же на первой горизонтали стоят 3 пешки, то ситуация получается та же, но «в обратном порядке», т.е. на второй горизонтали – 1 пешка, на третьей – 3, на четвертой – снова 1 и т.д., и всего на доске такое же самое количество пешек: 16.

2) На первой горизонтали – 2 пешки. Рассуждая аналогично, выясняем, что на второй горизонтали находятся 6 пешек, на третьей – 2, на четвертой – снова 6, на пятой – опять 2 и т.д. Тогда суммарное число пешек на доске равно 2 + 6 + 2 + 6 + 2 + 6 + 2 + 6 = 32.

Ну а если на первой горизонтали стоят, наоборот, 6 пешек, то ситуация получается та же, но в «обратном порядке», и количество пешек на доске то же самое: 32.

3) Остальные значения количества пешек на первой горизонтали: 4, 5, 7 или 8 – невозможны, так как эти значения не делятся на 3, поэтому на второй горизонтали может быть лишь втрое больше пешек (но не втрое меньше), однако втрое большее количество пешек во всех случаях больше 8.

Итак, общий вывод: на доске либо 16, либо 32 пешки.

Рассмотрим теперь первые две вертикали. На одной из них вдвое больше пешек, чем на второй. Пусть на той вертикали, где меньше пешек, их количество равно n. Тогда на другой вертикали число пешек равно $2n$. Суммарное же количество пешек на первых двух вертикалях равно $n + 2n = 3n$, т.е. делится на 3. Аналогично, суммарные количества пешек на 3-й и 4-й вертикалях, на 5-й и 6-й вертикалях, на 7-й и 8-й вертикалях также делятся на 3. Поэтому и суммарное количество пешек на всех вертикалях (т.е., собственно, на всей доске) делится на 3. Но, как мы знаем, общее количество пешек равно либо 16, либо 32, что на 3 не делится. Противоречие!

5. а) Примем сторону одного маленького квадратика за 1, и пусть квадрат $ABCD$ – это наш гриб. Проекции одного червяка на стороны AB и AD – отрезки длин m и n – натуральные числа. Ясно, что червяк целиком умещается в прямоугольнике $m \times n$; в частности, так как площадь червяка равна 5, $mn \geq 5$. Легко проверить, что тогда и $m + n \geq 5$. Рассмотрим теперь все проекции 13 червяков на стороны AB или AD. В силу вышесказанного, сумма этих 26 отрезков не меньше чем $13 \times 5 = 65$. Но сумма длин AB и AD равна 32. Так как $2 \times 32 = 64 < 65$, то найдется точка на одной из сторон AB или AD, которая принадлежит проекциям на эту сторону по крайней мере трех червяков. Разрез, проходящий через эту точку перпендикулярно стороне, которой она принадлежит, пройдет через всех червяков, в чьих проекциях она содержится.

б) Нет. Нетрудно поместить четырех червяков в квадрат 5×5 так, чтобы любая прямая, параллельная стороне квадрата, пересекала не более двух червяков (рис.3). Расположив три таких квадрата 5×5 «по диагонали» в квадрате 16×16, получим пример 12 червяков, никаких трех из которых нельзя пересечь линией, параллельной стороне квадрата.

Рис. 3

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Ускорение: а) направлено вертикально вниз; б) отклонено от вертикали в направлении, противоположном движению снаряда.

2. Выталкивающая сила, действующая в воздухе на шар, больше выталкивающей силы, приложенной к гире, поскольку объем шара больше объема гири. В вакууме выталкивающие силы исчезнут, и шар перетянет.

3. Нет. Жидкость в трубке находится в неустойчивом равновесии, поэтому во втором случае ртуть, скорее всего, вытечет из трубки, а в образовавшийся вакуум ворвется вода.

4. Если над ртутью воздух отсутствует, объем пузырька меняться не будет.

5. На верхний торец трубки сверху действует сила атмосферного давления, которая ничем не компенсируется, так как над ртутью в трубке вакуум. Поэтому показания динамометра являются суммой веса трубки и силы атмосферного давления.

6. Нагнетающие насосы будут, всасывающие – нет.

7. При откачивании воздуха внутреннее давление воздуха в пузырьке становится больше внешнего, поэтому пузырек раздувается.

8. На уровне жидкости в сосуде давление равно нулю. А давление в точке, находящейся выше уровня жидкости в сосуде, меньше давления на этом уровне, значит, давление отрицательное – жидкость растянута.

9. Нет. Например, в очень высокой вертикальной трубе (сравнимой с высотой атмосферы) воздух займет лишь нижнюю ее часть.

10. Для уменьшения теплопроводности.

11. Путем излучения, так как теплопроводность или конвекция в межпланетных пространствах практически невозможны.

12. Нет. Изменение температуры тела будет зависеть от баланса между излученной и поглощенной энергией.

13. При втекании порции газа в сосуд окружающий газ совершает над ней работу, которая идет на повышение внутренней энергии газа в сосуде и приводит к росту его температуры. Однако через достаточно большой промежуток времени температура выравнивается.

14. Температура газа будет уменьшаться за счет перехода части внутренней энергии газа в кинетическую энергию струи.

15. Вода одновременно будет кипеть и замерзать.

16. Нет. Для передачи звуковых волн нет среды.

17. Из-за диффузии газа из трубки длина свободного пробега электронов увеличивалась бы, а напряжение зажигания уменьшалось.

18. Чтобы избежать рассеяния частиц на молекулах, входящих в состав воздуха.

19. Да. Поскольку изменится оптическая разность хода лучей, определяемая показателем преломления среды.

20. В веществе скорость света меньше, чем в вакууме.

Микроопыт

От нити лампы к руке тепло передается излучением, не требующим наличия какой-либо промежуточной среды.

Кинематика и векторы

1. $\alpha_{1,2} = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\varphi \pm \beta\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi + 1 - \beta^2}}{1-\beta^2}$, где $\beta = \dfrac{v}{c}$.

2. $\alpha \approx \dfrac{4\pi R}{vT} \approx 0{,}02$, $\alpha \approx 1^\circ$.

3. $L_{\min} = L\sin\alpha \cdot \dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}}$;

$\tau = \dfrac{L\left(v_2 - v_1\cos\alpha\right)}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}$.

4. $v_0 = \sqrt{\left(\dfrac{L}{t}\right)^2 + \left(\dfrac{gt}{2}\right)^2} \approx 7{,}8$ м/с; $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{gt^2}{2L} \approx 50^\circ$.

5. Считая, что при броске на максимальную дальность лучшие результаты составляют примерно $L_{\max} = 30$ м, получаем

$$H_{\max} = \frac{L_{\max}}{2}\left(1 - \left(\frac{l}{L_{\max}}\right)^2\right) \approx 8{,}3 \text{ м}.$$

6. $v_{02} = \sqrt{v_{01}^2 + \left(\dfrac{gL}{v_{01}\sin\alpha}\right)^2 - 2gL\operatorname{ctg}\alpha}$;

$\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{2v_{01}^2\sin^2\alpha}{2gL - v_{01}^2\sin 2\alpha}$. Отметим, что $\operatorname{tg}\beta > 0$ при условии $2gL > v_{01}^2\sin 2\alpha$.

7. $s_2 = 1{,}5\, s_1 = 21$ м.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 6. *Указание*. Запишите уравнение в виде

$$f(x) = f\left(\sqrt{3x+18}\right),$$

где $f(t) = 3t - 2|t-2|$. Функция f возрастает на всей числовой прямой, так что исходное уравнение равносильно такому: $x = \sqrt{3x+18}$.

2. $x \in (-3;\, 7)$, $x \neq 2 \pm \sqrt{6}$, $x \neq \pm 2$. *Указание.* Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left(\lg(7-x) - \lg(x+3)\right)^2 > 0, \\ x \neq -2, \quad x \neq 2 \pm 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

3. 450/17; 255/8; 960/17. *Указание.* Докажите, что ΔCFD равнобедренный, BC – касательная к окружности, а треугольники BCF и CDF подобны. Подобны также и треугольники ACF и DBC.

4. Да; $C = 9/2$. *Указание.* Пусть

$$f(x) = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$g(x) = A\cos(x+\varphi) + B\sin(2x+\psi) =$$

$$= A\sin\left(x + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + B\cos\left(2x + \psi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ясно, что $h(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{9}{2}$ при всех x, если $A = -4$, $B = \dfrac{1}{2}$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}$, $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2\pi}{3}$.

Наоборот, если $h(x) = \text{const}$, то при всех x выполняются равенства

$$h(x) - h(x+\pi) = 2\left(A\cos(x+\varphi) + 4\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 0,$$

$$h(x) - h\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(B\sin(2x+\psi) - \frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 0,$$

откуда

$$h(x) = 4\frac{1}{2} + 0 + 0 = \frac{9}{2}.$$

5. $\dfrac{169}{5292}\sqrt{187}$.

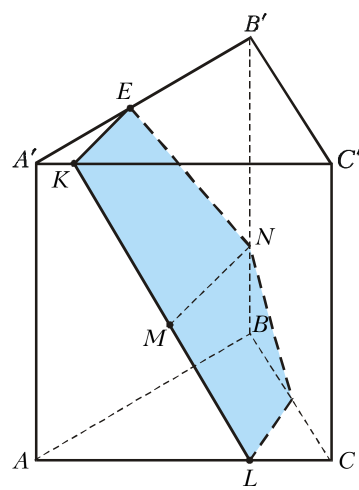


Рис. 4

Заметим, что плоскость, проходящая через точку M пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ и делящая объем призмы пополам, обязательно проходит через середину N ребра BB': действительно, если она проходит через точку N, то делит призму на две симметричные относительно оси MN части, а если нет, то, пересекая грань $ACC'A'$ по некоторому отрезку KL (рис.4), она не может делить призму на равновеликие части, так как это уже делает плоскость KLN.

Таким образом, секущая плоскость перпендикулярна грани $ACC'A'$ и может пересекать эту грань либо по отрезку K_1L_1 (рис.5,*а*), либо по отрезку K_2L_2 (рис.5,*б*), где

$$\alpha = \angle AMD,\ \sin\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\alpha = \frac{4}{5},$$

$$AH = \frac{4}{13},\ AM = \frac{5}{14},$$

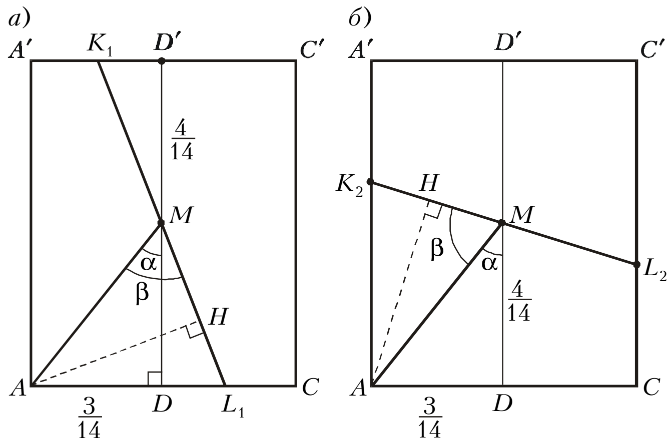


Рис. 5

$$\beta = \angle AMH,\ \sin\beta = \frac{56}{65},\ \cos\beta = \frac{33}{65},$$

$$\cos\angle DML_1 = \cos(\beta-\alpha) = \frac{12}{13},\ \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{5}{12},$$

$$\sin\angle DMK_2 = \sin(\beta+\alpha) = \frac{323}{325}.$$

В первом случае сечение выглядит, как на рисунке 4, и имеет площадь

$$S_1 = (MN+KE)\cdot KM = MN\left(1+\frac{A'K_1}{A'D'}\right)ML =$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{3}{14}\right)^2}\left(1+\frac{\frac{3}{14}-\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{14}}{\frac{3}{14}}\right)\cdot\frac{4}{14\cdot\frac{12}{13}} =$$

$$= \frac{169}{14^2\cdot 27}\sqrt{187} = \frac{169}{5292}\sqrt{187}.$$

Во втором случае сечение треугольное и имеет площадь

$$S_2 = K_2M\cdot MN = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{323}{325}}\sqrt{1-\left(\frac{3}{14}\right)^2} = \frac{975}{14^2\cdot 323}\sqrt{187} < S_1.$$

6. $-\frac{3}{4};\ \frac{4}{3}$. *Указание*. Множество решений каждого из неравенств системы

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

может представлять собой отрезок, объединение двух непересекающихся лучей (с началом), прямую, точку или пустое множество. Поэтому система может иметь единственное решение только в следующих случаях:

А. Решением одного из неравенств является ровно одна точка.

Б. Множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, т.е. существует решение системы

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4=0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1=0.\end{cases}$$

Вариант 2

1. $(-\infty;-2]\cup[0;\lg 101-2)$. *Указание*. Неравенство преобразуется к виду $(\log_2 5-1)\log_5 y\le 0$, где $y = 101\cdot 10^x - 10^{2+2x}$.

2. Нет. *Указание*. Приведите уравнение к виду

$$12\sin x = |5\cos x - 4|.$$

Решениям этого уравнения соответствуют точки $A(u;v)$ и $B(u;v)$ пересечения единичной окружности $u^2+v^2=1$ с графиком функции $12v = |5u-4|$ (рис.6).

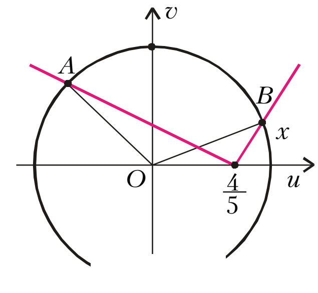


Рис. 6

3. $\frac{34}{9}$. *Указание*. Пусть O – центр параллелограмма, $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда, так как

$$2\left(AB^2+BC^2\right) = BD^2+AC^2,\ BO\cdot BE = AO\cdot OC,$$

получаем систему

$$\begin{cases}x^2+y^2=17\\ x(9-x)=y^2.\end{cases}$$

4. 618, 659, 698.

5. $\left(-\infty;-\frac{8}{7}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(\frac{8}{9};+\infty\right)$. *Указание*. Область значений функции $f(a) = a\sqrt[4]{4-a^4}$ – отрезок $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$. Поэтому корнями данного уравнения не могут быть те и только те значения x, для которых либо $2x^4+x^3<0$, либо $4\sqrt{2x^4+x^3} > \sqrt{2}\left|x+4x^2-8\right|$. Осталось решить полученные неравенства.

6. 26; $\left[42;\ \frac{253+84\sqrt{3}}{8}\right]$.

Периметр сечения многогранника плоскостью, отстоящей от основания $A'B'C'D'$ (размером 6×7) на расстояние $x\in[0;h]$, где h – высота исходного параллелепипеда, представляет собой линейную функцию $P(x)$, так как сечение каждой из восьми перечисленных в условии граней есть отрезок, длина которого линейно зависит от x. Поэтому из равенств $P(0)=P(h)=26$ следует, что функция $P(x)$ есть константа, равная 26.

Аналогично, площадь сечения $S(x)$ – квадратичная функция, удовлетворяющая равенствам $S(0)=S(h)=42$, поэтому она достигает экстремума в точке $\frac{h}{2}$, т.е. когда плоскость сечения равноудалена от оснований (на рисунке 7 изображен вид «сверху»). Это сечение представляет собой 8-угольник, площадь которого равна

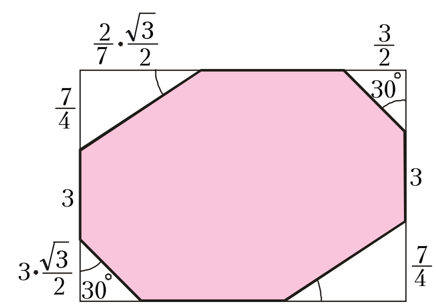


Рис. 7

$$S\left(\frac{h}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}+\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(3+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{4}\right) -$$

$$- \frac{7}{4}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{253+84\sqrt{3}}{8} > 42.$$

Вариант 3

1. 12. **2.** $\left\{\left(\arccos\left(\frac{27}{28}\right)+2\pi m;\ \pi+\arcsin\left(\frac{17}{28}\right)+2\pi n\right);\right.$

$\left(-\arccos\left(\dfrac{27}{28}\right)+2\pi m;\ -\arcsin\left(\dfrac{17}{28}\right)+2\pi n\right);\ m, n \in \mathbf{Z}\Big\}$.

3. 10 км/ч. *Указание.* Рассмотрите два случая: 1) встреча произошла до момента или в момент изменения скорости первым велосипедистом;
2) встреча произошла после изменения скорости первым велосипедистом.

4. $\dfrac{192}{17}$ или $\dfrac{1728}{25} = 69{,}12$. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм (рис.8), O_1, O_2, O_3 и O_4 – центры окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD и AOD соответственно.

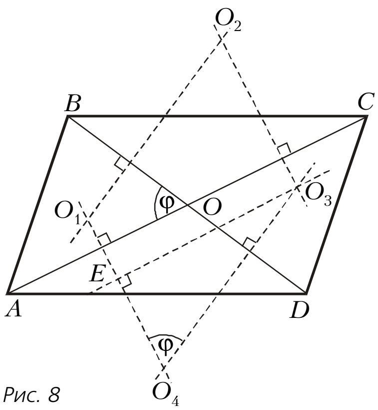


Рис. 8

Пусть $\angle AOB = \varphi$ $(0 < \varphi < \pi)$. Так как O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 и O_1O_4 являются серединными перпендикулярами к отрезкам BO, CO, DO и AO соответственно, то $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм, причем $\angle O_1O_4O_3 = \angle AOB = \varphi$. Пусть E – проекция точки O_3 на прямую O_1O_4. Поскольку $AO = OC$, имеем $O_3E = AO$. Тогда $AO = O_3O_4 \cdot \sin\varphi = 16\sin\varphi$. По следствию из теоремы синусов для треугольника ABO, в котором известен радиус описанной окружности $R = 5$, получаем $AB = 2R\sin\varphi = 10\sin\varphi$.

В том же треугольнике $BO = \dfrac{BD}{2} = 6$, следовательно, по теореме косинусов

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cos\varphi,$$

т.е.

$$100\sin^2\varphi = 256\sin^2\varphi + 36 - 192\sin\varphi\cos\varphi.$$

Поделив полученное равенство на $12\sin^2\varphi$ $(\sin^2\varphi \neq 0)$, приходим к квадратному уравнению

$$3\operatorname{ctg}^2\varphi - 16\operatorname{ctg}\varphi + 16 = 0.$$

Отсюда имеем два решения

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{4}{3} \text{ или } \operatorname{ctg}\varphi = 4.$$

Дальнейшие вычисления очевидны.

5. $\left[-3-\dfrac{1}{\sqrt3};\ 3\right)\cup\left(-3;\ -3+\dfrac{1}{\sqrt3}\right]$ при $a \in \left(-\infty;\ -\dfrac14\right]$;

$$\left(-4;\ -3-\varphi(a)\right]\cup\left[-3-\frac{1}{\sqrt3};\ -3\right)\cup$$

$$\cup\left(-3;\ -3+\frac{1}{\sqrt3}\right]\cup\left[-3+\varphi(a);\ -2\right) \text{ при } a \in \left(-\frac14;\ \frac{1}{10}\right);$$

$$(-4;\ -3)\cup(-3;\ -2) \text{ при } a = \frac{1}{10};$$

$$\left(-4;\ -3-\frac{1}{\sqrt3}\right]\cup\left[-3-\varphi(a);\ -3\right)\cup$$

$$\cup\left(-3;\ -3+\varphi(a)\right]\cup\left[-3+\frac{1}{\sqrt3};\ -2\right) \text{ при } a \in \left(\frac{1}{10};\ \frac13\right);$$

$$\left(-4;\ -3-\frac{1}{\sqrt3}\right]\cup\left[-3+\frac{1}{\sqrt3};\ -2\right) \text{ при } a \in \left[\frac13;\ +\infty\right).$$

Здесь использовано обозначение $\varphi(a) = \left(\dfrac{1-3a}{a+2}\right)^{\log_3\sqrt{\frac{a+2}{1-3a}}}$.

Указание. Выполнив замену

$$t = 3^{-2\cdot\sqrt{-\log_{81}\left(x^2+6x+9\right)}} = 3^{-2\cdot\sqrt{-\log_9|x+3|}},$$

после преобразований приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 3(a+2)t^2 + (8a-5)t - (3a-1) \geq 0, \\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

6. $729\sqrt6$; $\dfrac{27-3\sqrt{11}}{4\sqrt2}$.

Докажем вспомогательное

Утверждение. Пусть в треугольник GSH вписана окружность с центром в точке O, касающаяся его сторон GS и GH в точках K и M соответственно. Прямая KM пересекает прямую SO в точке P. Тогда $\angle SPH = 90^\circ$.

Доказательство. 1) Если треугольник GSH равнобедренный, $GS = SH$, то точки P и M совпадают. SM является биссектрисой, медианой и высотой треугольника GSH, поэтому угол SPH – прямой.

2) Пусть $SH < GS$. Тогда точки H и M лежат по одну сторону от прямой SO, а P лежит внутри треугольника GSH (рис.9).

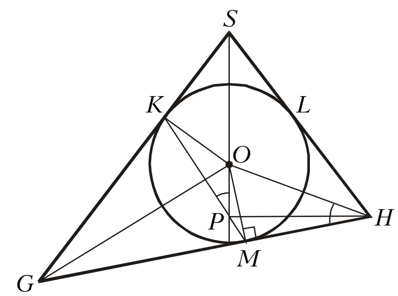


Рис. 9

Пусть $\angle GSH = \alpha$, $\angle SGH = \beta$, $\angle SHG = \gamma$.

Поскольку углы OKG и OMG – прямые, точки O, K, G, M лежат на одной окружности, следовательно, $\angle OKM = \angle OGM = \dfrac{\beta}{2}$. Тогда из треугольника SKP имеем

$$\angle SPK = \pi - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому $\angle OPM + \angle OHM = \pi$, следовательно, выпуклый четырехугольник $OPMH$ является вписанным в некоторую окружность. Но тогда $\angle OPH = \angle OMH = 90^\circ$.

3) Пусть теперь $SH > GS$. Тогда точки H и M лежат по разные стороны от прямой SO, а P находится вне треугольника GSH (рис.10).

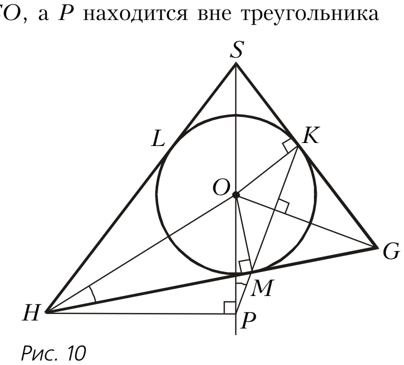


Рис. 10

Дословно повторяя рассуждения п.2), получаем

$$\angle OKM = \angle OGM = \frac{\beta}{2},$$

поэтому $\angle SPK = \dfrac{\gamma}{2}$. Так как равные углы OPM и OHM опираются на один и тот же отрезок OM, а их вершины P и H находятся по одну сторону от прямой OM, то существует окружность, проходящая через точки O, H, P, M. Следовательно, $\angle OPH = \angle OMH = 90^\circ$. Утверждение доказано.

Сфера, о которой идет речь в условии задачи, в пересечении с плоскостью ASB дает окружность, вписанную в треугольник GSH. Последний отсекается от треугольника ASB плоскостью, касающейся сферы в точке M (рис.11 и 12).

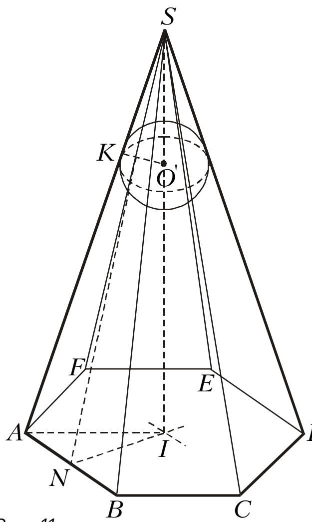


Рис. 11

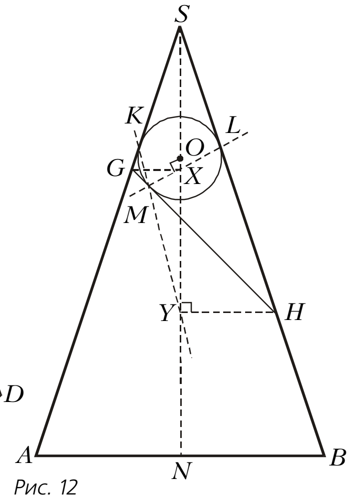


Рис. 12

Обозначим $AB = a$ и $GH = b$. Из доказанного утверждения следует, что точки пересечения прямых KM и LM с апофемой SN грани ASB являются проекциями точек G и H на эту апофему. Следовательно, так как по условию задачи апофема делится прямыми KM и LM на три равных отрезка, одна из этих точек делит ребро в отношении 1 : 2, а другая 2 : 1.
Пусть для определенности $SA = SB = 3x$, $SG = x$ и $SH = 2x$. Пусть $\angle ASB = \varphi$.
Применим теорему косинусов к треугольнику ASB:

$$18x^2 - 18x^2\cos\varphi = a^2, \text{ откуда } \cos\varphi = 1 - \frac{a^2}{18x^2}.$$

Теорема косинусов для треугольника GSH дает

$$x^2 + 4x^2 - 4x^2\left(1 - \frac{a^2}{18x^2}\right) = b^2, \text{ откуда } x^2 = \frac{9b^2 - 2a^2}{9}.$$

Поэтому $SA = \sqrt{9b^2 - 2a^2}$.
Пусть $SI = h$ – высота пирамиды. $AI = a$, поскольку $ABCDEF$ – правильный шестиугольник. Тогда $h = \sqrt{9b^2 - 3a^2}$. Отсюда

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCDEF}\cdot h = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Пусть O' – центр сферы, $O'K = R$ – ее радиус. Из подобия прямоугольных треугольников SAI и $SO'K$ получаем $R = a\dfrac{SK}{h}$.
Используя теорему об отрезках касательных, выходящих из одной точки, имеем

$$SK = \frac{SG + SH - GH}{2} = \frac{\sqrt{9b^2 - 2a^2} - b}{2}.$$

Значит, $R = \dfrac{a\left(\sqrt{9b^2 - 2a^2} - b\right)}{2\sqrt{9b^2 - 3a^2}}$.

Подставляя данные задачи $a = 9$ и $b = 3\sqrt{11}$, находим ответ.

Вариант 4

1. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **2.** 119.

3. $\left(-\frac{9}{5}; \frac{12}{5}\right)$. *Указание.* Перепишите исходную систему в виде

$$\begin{cases} y \le -3x - 3, \\ (x+2)^2 + (y+1)^2 \le 4^2. \end{cases}$$

Поскольку значение функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = (x-3)^2 + (y-4)^2$$

равно квадрату расстояния r между точками $(x; y)$ и $(3; 4)$, то на множестве решений системы функция $f(x; y)$ принимает минимальное значение в точке, ближайшей к точке $(3; 4)$ (рис.13).

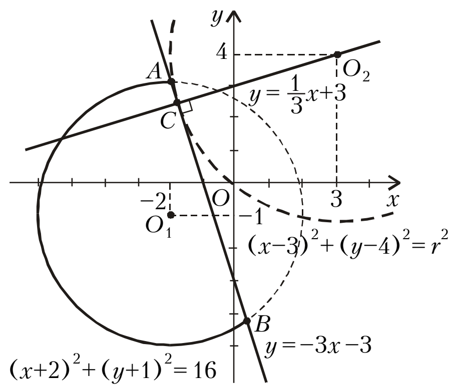


Рис. 13

4. $(4n+1)^2$, где $n \ge 0$ – целое. *Указание.* Приведем исходное уравнение к виду

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(6x + 15\sqrt{x}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(2x - 13\sqrt{x}\right)\right) = 2.$$

Так как значение синуса не превосходит 1, это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(6x + 15\sqrt{x}\right)\right) = 1, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(2x - 13\sqrt{x}\right)\right) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 15\sqrt{x} = 4k + 1, & k \in Z, \\ 2x - 13\sqrt{x} = 4l + 1, & l \in Z. \end{cases} \quad (1)$$

Решения системы (1) суть такие значения x ($x \ne 0$), для которых существуют некоторые целые k и l, удовлетворяющие уравнениям системы.
Докажем, что любое такое число x является квадратом целого числа. Вычитая из первого уравнения системы утроенное второе, получаем равенство

$$27\sqrt{x} = 2k - 6l - 1,$$

из которого следует, что $\sqrt{x} = p/q$, где p и q – взаимно простые нечетные натуральные числа. Тогда из второго уравнения системы (1) получим

$$2p^2 = q\left(13p + (4l+1)q\right),$$

что невозможно при нечетном $q > 1$.
Итак, $x = m^2$ – квадрат натурального числа.
Рассматривая остатки от деления числа m на 4, приходим к выводу, что система имеет решения в целых числах тогда и только тогда, когда число m равно $4n + 1$, $n \in Z$, т.е. $x = (4n+1)^2$, где $n \in Z$, $n \ge 0$.

5. $8 + 4\sqrt{6} - 10\arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$.

Пусть в трапеции $ABCD$ $AD \| BC$, $BC = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (рис.14). Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобокая: $AB = CD$. Пусть M и N – середины оснований трапеции BC и AD соответственно, тогда MN – высота трапеции, $MN = \sqrt{3} + \sqrt{2}$.
Центр O описанной около трапеции окружности лежит на

прямой MN. Поскольку

$$MO = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{3} < MN,$$

точка O лежит внутри трапеции. Тогда

$NO = MN - MO = \sqrt{2}$, а $AN = ND = \sqrt{OD^2 - ON^2} = \sqrt{3}$.

Следовательно, $AD > BC$, поэтому $\angle BAD = \angle CDA$ – острые углы, а $\angle ABC = \angle DCB$ – тупые углы.

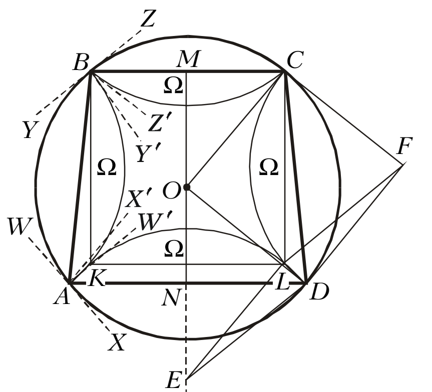


Рис. 14

Дуги AB, BC, CD и AD отражаются внутрь трапеции симметрично относительно прямых AB, BC, CD и AD соответственно. Дуги, отраженные внутрь трапеции, далее будем называть внутренними. Пусть XW и YZ – касательные, проведенные к окружности в точках A и B соответственно, AW', AX', BY' и BZ' – лучи, симметричные лучам AW, AX, BY и BZ относительно прямых AB, AD, AB и BC соответственно. (Таким образом, AW' касается внутренней дуги AB в точке A, AX' касается внутренней дуги AD и т.д.)

Пусть E и F – точки, симметричные точке O относительно прямых AD и CD соответственно.

Заметим, что каждый из углов WAB, XAD – это угол между касательной и хордой, поэтому

$$\angle W'AB + \angle X'AD = \angle WAB + \angle XAD = \angle BCD > \angle BAD.$$

Это означает, что внутренние дуги AB и AD пересекаются внутри трапеции. Пусть K – точка их пересечения. Аналогично доказывается, что внутренние дуги CD и AD тоже пересекаются в некоторой точке L.

В то же время

$$\angle Y'BA + \angle Z'BC = \angle YBA + \angle ZBC = \angle ADC > \angle ABC,$$

откуда следует, что внутренние дуги AB и BC не пересекаются внутри трапеции. Аналогично, не пересекаются внутренние дуги BC и CD.

Так как $OC = OD = FC = FD = ED = EL = FL = \sqrt{5}$, то $OCFD$ и $ELFD$ – ромбы, значит, $OC \| FD \| EL$. Следовательно, $EOCL$ – параллелограмм, $CL = OE = 2ON = 2\sqrt{2}$, $CL \| OE$. Отсюда получается, что $BC = CL$, $BC \perp CL$. Аналогично доказывается, что $BC = BK$, $BC \perp BK$. Значит, $KBCL$ – квадрат. Таким образом, дуги BC, BK, CL и KL равны, так как это дуги равных окружностей, стягиваемые равными хордами. Дуги AB и BC не пересекаются внутри трапеции, следовательно, дуги BC, BK, CL и KL не пересекаются внутри квадрата $KBCL$.

Пусть Ω – площадь каждого из сегментов, отсекаемых равными хордами BC, BK, CL и KL от равных окружностей.

Площадь s сегмента круга радиуса r, дуга которого задается центральным углом α, вычисляется по формуле

$$s = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha).$$

В нашем случае $\sin\angle COM = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $\cos\angle COM = \sqrt{\frac{3}{5}}$, значит, $\sin\angle BOC = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Поэтому

$$\Omega = \frac{5}{2}\left(\arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) - \frac{2\sqrt{6}}{5}\right).$$

Тогда окончательно получаем, что искомая площадь S фигуры, состоящей из всех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов, равна

$$S = BC^2 - 4\Omega = 8 - 10\arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) + 4\sqrt{6}.$$

6. $\left(-13 - \sqrt{57}; 8\right)$. *Указание.* Пусть

$$a = f\left(x^2 - 2x - 112\right),\ b = f\left(-2x\sqrt{32 - 2x}\right),$$

$$c = f\left(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112\right).$$

Основание степени в знаменателе равно $3c - 2b = c + 2(c - b)$. Поскольку функция $f(x)$ отрицательна, $c < 0$. Разность $c - b < 0$ в силу возрастания $f(x)$, так как

$$-2x\sqrt{32 - 2x} > -2x\sqrt{32 - 2x} - 112.$$

Поэтому знаменатель $\left(c + 2(c - b)\right)^7$ в исходном неравенстве отрицателен, и следовательно, неравенство равносильно неравенству

$$2a + |a - 3b| < 0,$$

которое равносильно двойному неравенству $2a < a - 3b < -2a$, равносильному системе

$$\begin{cases} a < -3b, \\ a < b. \end{cases}$$

Первое неравенство в системе выполнено вследствие отрицательности $f(x)$. Второе же в силу возрастания функции $f(x)$ равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 112 < -2x\sqrt{32 - 2x},$$

которое приводится к виду

$$\left(x + \sqrt{32 - 2x}\right)^2 < 114,$$

после чего легко решается.

Вариант 5

1. $(2; 3]$. **2.** $\frac{1 \pm \sqrt{1 + 5\pi n}}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$. **3.** $\log_3 2$, $2\log_2 3$.

4. $7\sqrt{3}$. *Указание.* Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

5. $\left(-\sqrt{85/3}; -\sqrt{5/3}\right) \cup \left(\sqrt{5/3}; \sqrt{85/3}\right)$.

6. $\left(13 + 2\sqrt{3}\right)a$.

Указание. Плоскость сечения, параллельная ребру SM двугранного угла, пересекает его грани по параллельным прямым AB и CD. Эти прямые отсекают на сторонах правильных треугольников (граней правильного тетраэдра) равные отрезки: $SA = MB$, $SD = MC \Rightarrow AD = BC$, причем $BC \| KM$.

7. $\left(2a^2 + \frac{a}{2}; +\infty\right)$ при $a < 0$;

$\left(\frac{a^2}{18} + \frac{a}{2}; +\infty\right)$ при $a \geq 0$.

Указание. Выполнив замену $t = \sqrt{2x - a}$, сведите задачу к решению системы

$$\begin{cases} 3t^2 + 5at - 2a^2 > 0, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

8. $\frac{mk}{l}$. *Указание.* Пусть $NA \perp OL$, $NB \perp OM$, $NC \perp KM$, $ND \perp LM$; $NA = k$, $NB = m$, $NC = l$, $ND = n$.

Проведем отрезки NK и NM. Тогда $\Delta NKA \sim \Delta NMD$ (в этих прямоугольных треугольниках $\angle NKA = \angle NML$ как вписанные, опирающиеся на дугу NL).

Другая пара подобных прямоугольных треугольников имеет те же гипотенузы NK и NM: $\Delta NKC \sim \Delta NMB$ (угол NMB между хордой и касательной равен вписанному углу NKM, опирающемуся на дугу NM).

Из этих двух подобий следует

$$\frac{k}{n} = \frac{NK}{NM} = \frac{l}{m} \Rightarrow mk = ln.$$

Вариант 6

1. $\pi n - 2,\ n \in \mathbf{Z}$. **2.** $(-\infty;\ 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ 3\right)$.

3. $-1;\ 2/3$. **4.** $\frac{a}{2}\sqrt{kl}$. **5.** $(-\infty;\ -2)$. **6.** $\frac{80}{3}$.

7. $\frac{3\pi}{2}$ при $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, при других a решений нет.

Указание. Приведите уравнение к виду

$$\cos 2x - \cos 2(x+a) = \sin a - 3.$$

Последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 2(x+a) = 1,\ \sin a = 1. \end{cases}$$

8. Продолжим прямую MN ($MN \| AC$ по условию) до пересечения с окружностями (рис.15), тогда $AEFC$ – прямоугольник ($\angle AEN$ и $\angle MFC$ опираются на диаметры).

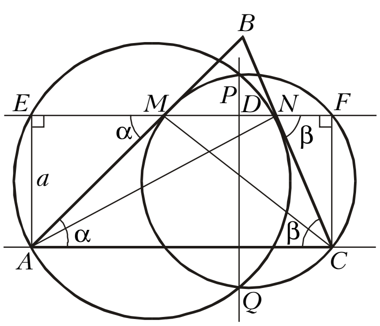


Рис. 15

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $EA = FC = a$. Тогда $\angle EMA = \alpha$, $\angle FNC = \beta$, EN и PQ – пересекающиеся хорды одной окружности, MF и PQ – другой. Следовательно,

$ED \cdot DN = DP \cdot DQ$, $MD \cdot DF = DP \cdot DQ$, откуда получаем, что $ED \cdot DN = MD \cdot DF$. Подставив в эту формулу выражения $ED = EM + MD = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha + MD$, $DF = DN + NF = DN + a\,\mathrm{ctg}\,\beta$, находим $\frac{MD}{DN} = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\beta}$. Если $\frac{MD}{DN} = \sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Вариант 7

1. $(0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$.

2. 1. *Указание.* Пусть $\angle A = \angle C = 2\alpha$. Тогда по теореме синусов

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{DC}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

3. $\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,2x + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}\,3x$.

4. 2. *Указание.* Левая часть уравнения не больше чем 3, а правая не меньше чем 3.

5. $[100;\ +\infty)$. *Указание.* Поскольку $|a| \ge a$ при любом a, левая часть не меньше чем $200x$, причем равенство возможно лишь тогда, когда все подмодульные выражения неотрицательны.

6. $[3;\ +\infty)$. *Указание*. Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a) \ge 0, \\ x(x-3)(x-a) \le 0. \end{cases}$$

При $a \ge 3$ у системы единственное решение $x = a$. При $a < 3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[b;\ 3]$, где $b = \max(a,\ 2)$.

7. 4004001. Подставляя $x = 0, 1, 2, \ldots, 2001$ в равенство

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1$$

и учитывая начальное значение $f(0) = 0$, имеем равенства

$$f(1) = 1,$$

$$f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 1,$$

$$f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(2000) = f(1999) + 2 \cdot 1999 + 1,$$

$$f(2001) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 1,$$

сложив которые, получаем

$$f(2001) = 2(1 + 2 + \ldots + 1999 + 2000) + 1 \cdot 2001 = 2001^2.$$

Вариант 8

1. $\{-12\} \cup (7;\ +\infty)$. **2.** $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

3. $\left[\frac{1}{8};\ 1\right) \cup (1;\ 16] \cup (64;\ +\infty)$.

4. $3/4$. *Указание.* Пусть t_1 и t_2 – целые числа часов, за которые первый и второй самолеты облетают свои окружности. По условию,

$$\begin{cases} 43 \le 4t_1 \le 49, \\ 43 \le 5t_2 \le 49, \\ |4t_1 - 5t_2| \ge 2, \end{cases}$$

откуда $t_1 = 12$, $t_2 = 9$, а поскольку скорости самолетов одинаковы, получаем $\frac{r}{R} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$.

5. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. Медиана BD делит верхнюю сторону EF квадрата пополам (рис.16):

$$\frac{EL}{AD} = \frac{BL}{BD} = \frac{LF}{DC} \Rightarrow EL = FL.$$

Высота LN, опущенное из точки L на сторону AC, проходит через центр O квадрата.

Отрезок DM пересекает отрезок LN в точке O и делит его пополам. Поэтому, как и выше, имеем

$$\frac{BM}{LO} = \frac{MH}{ON} \Rightarrow BM = MH.$$

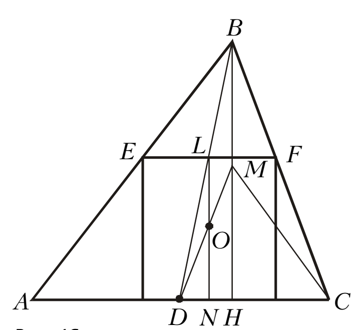


Рис. 16

Таким образом, в треугольнике DMC сторона DC вдвое меньше стороны AC, а опущенная на DC высота MH вдвое меньше высоты

BH. Поэтому

$$S_{DMC} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

6. $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, ± 1, $\pm\sqrt{3}$. *Указание*. Перепишем систему:

$$\begin{cases} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\,x\right), \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\,x\right). \end{cases}$$

1) Если единственное на $[0;\ 2\pi]$ решение x не совпадает с $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то из первого уравнения последней системы вытекает, что числа x и $\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\,x$ имеют равные по модулю ненулевые косинусы, и тогда второе уравнение приводит к равенству $a - \frac{2}{3} = \pm 1$, т.е. $a = -\frac{1}{3}$ или $a = \frac{5}{3}$.

Убедитесь, что при $a = -\frac{1}{3}$ уравнение действительно имеет единственное решение на отрезке $[0;\ 2\pi]$, а при $a = \frac{5}{3}$ такое решение не единственно.

2) Если $\frac{\pi}{2}$ – единственное решение системы на $[0;\ 2\pi]$, то $a = \pm\sqrt{3}$.

3) Если $x = \frac{3\pi}{2}$ – единственное решение системы на $[0;\ 2\pi]$, то

$$-1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\,\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \sqrt{6-2a^2}\,\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-2a^2} = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}n,\ n \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-2a^2} = \frac{2}{3}, 2 \Leftrightarrow a = \pm\frac{5}{3}, \pm 1.$$

Осталось проверить найденные значения a.

Вариант 9

1. $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** -1. **3.** $(3;\ 4]$. **4.** $\left(2\sqrt{3} - 3\right)/6$.

5. $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Неравенство приводится к виду

$$\left(\log_\pi(\sin x) - \log_\pi(\sin 2x)\right)^2 \ge 0,$$

а последнее неравенство верно на всей области допустимых значений.

6. Нельзя. Возьмем систему координат с началом в угловом дереве и осями, направленными вдоль сторон участка (рис.17). Два других дерева должны располагаться вне круга с центром в O и радиусом 2,5, т.е. на выделенном на рисунке участке. Разница абсцисс этих деревьев получится меньше 2, а разница ординат – не больше 1. Следовательно, расстояние между ними будет меньше $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 2{,}5$, т.е. задание выполнить нельзя.

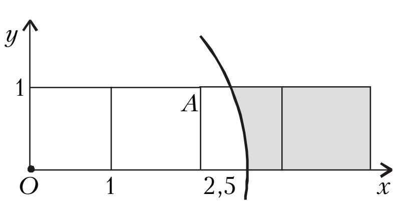


Рис. 17

Вариант 10

1. $(1;\ 2] \cup (7;\ 8)$. **2.** $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$, $n, k \ge 0$.

3. $3 \pm \sqrt{5}$.

4. а) $\frac{16}{3}$, центр вне треугольника;

б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$, центр внутри треугольника.

5. $(1;\ 5)$; $\left(\frac{5}{2};\ 2\right)$. *Указание.* Перейдите к переменным $u = \frac{xy}{2}$, $v = 2x + y - xy$.

6. 7 ч; 55 км. Выберем прямоугольную систему координат с центром в точке C. Без уменьшения общности можно считать, что точка A находится на положительной полуоси абсцисс, а точка B – на положительной полуоси ординат. Тогда, поскольку по условию $AC = CB = 275$ (км), через время t (ч) после начала движения координаты первого мотоциклиста суть $(275 - 44t;\ 0)$, а второго – $(0;\ 275 - 33t)$. Квадрат расстояния $r(t)$ между этими точками равен

$$r^2(t) = (275 - 44t)^2 + (275 - 33t)^2 =$$

$$= 11^2\left((25 - 4t)^2 + (25 - 3t)^2\right) = 55^2\left(t^2 - 14t + 50\right).$$

Минимум функции

$$r(t) = 55\sqrt{t^2 - 14t + 50}$$

в силу свойств квадратного трехчлена достигается при $t_0 = 7$ и равен

$$r(t_0) = 55\sqrt{49 - 98 + 50} = 55.$$

7. $\frac{3}{4}$. *Указание.* Так как сфера в точке A касается плоскости ABC, ее диаметр AD перпендикулярен этой плоскости. Сечением сферы плоскостью ABD является окружность с диаметром AD, для которой AB – касательная, а BD – секущая. Из прямоугольного треугольника ABD находим BD, а затем BM. Аналогично находим отрезки CD и CN, а потом и MN из треугольника DMN.

8. $\{3\} \cup \left[\sqrt{10};\ \sqrt{11}\right)$. Решение данного уравнения – это две непересекающиеся серии

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \pi n, \\ x_2 = \frac{13}{4}(2\pi n + 1), \end{array}\right. \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Заметим, что расстояние между соседними точками первой серии равно π, а второй – $\frac{13\pi}{2}$. Длина отрезка, указанного в условии задачи,

$$l = \left(a^2 + 1\right)\pi - 2a\pi = (a - 1)^2\pi.$$

Всякий отрезок, длина которого $l < 4\pi$, содержит не более четырех корней первой серии и не более одного – второй. Если же $l \ge 6{,}5\pi$, то отрезок такой длины содержит как минимум шесть корней первой серии и по крайней мере один – второй. Таким образом, ровно шесть различных корней уравнения на данном отрезке могут быть лишь при условии

$$4\pi \le (a - 1)^2\pi < 6{,}5\pi \Leftrightarrow 2 \le |a - 1| < \sqrt{6{,}5}.$$

Принимая во внимание условие задачи $a \ge 1$, имеем $3 \le a < 1 + \sqrt{6{,}5}$.

Если $a = 3$, то отрезок $[6\pi;\ 10\pi]$ содержит пять корней 6π,

7π, 8π, 9π, 10π вида x_1 и корень $x_2 = \frac{39}{4}\pi$, т.е. ровно шесть корней.

Пусть $a > 3$. Учитывая неравенство $a < 1+\sqrt{6{,}5}$, получаем, что левая граница заданного отрезка удовлетворяет условию

$$6\pi < 2a\pi < 2\left(1+\sqrt{6{,}5}\right)\pi < 8\pi .$$

Тогда для наличия ровно шести корней необходимо и достаточно, чтобы

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6 < 2a \le 7,\\ 11 \le a^2+1 < 2;\end{cases}\\ \begin{cases}7 < 2a < 2\left(1+\sqrt{6{,}5}\right),\\ 12 \le a^2+1 < 13,\end{cases}\end{array}\right.$$

т.е. $\sqrt{10} \le a < \sqrt{11}$.

Вариант 11

1. $\left[-\sqrt{10}; -3\right) \cup \left(3; \sqrt{10}\right]$. *Указание*. Докажите, что $0 < \sqrt{31} - \sqrt{21} < 1$.

2. $\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. -9. *Указание.* Положим $b = a + d$, $c = a + 2d$. Выразив минимизируемое выражение через a и d, получим

$$2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9 .$$

Последнее выражение достигает минимума, равного -9, при $a = -3$. Осталось показать, что для этого a можно подобрать такое d, что числа $a - c = -2d$, $c - b = d$, $2a = -6$ образует геометричесую прогрессию.

4. $2\sqrt{3}$. *Указание*. Смежные стороны ромба, а значит, и опирающиеся на них треугольники симметричны относительно одной из диагоналей ромба (рис.18). Поэтому четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником со сторонами, параллельными диагоналям ромба.

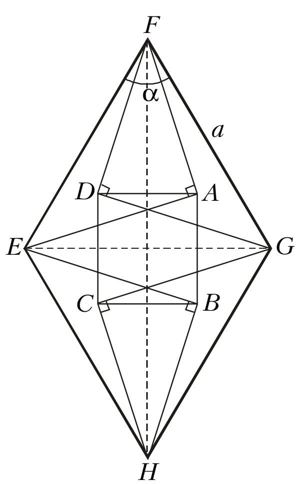


Рис. 18

5. 3. *Указание.* Поскольку $-1 \le 2^x - 7 \le 1$, то $x \le 3$, но тогда $\frac{6\pi}{x} \ge 2\pi$. Однако левая часть уравнения не больше чем 2π, что возможно только при $x = 3$.

6. $\boldsymbol{Z} \setminus \{-11; -10; \ldots; -4; -3\}$. *Указание*. Первое неравенство задает на координатной плоскости Oxy круг с центром $(1; -2)$ и радиусом $|k+5|$, второе – круг с центром $\left(\frac{k}{5}; -\frac{2k}{5}\right)$ и радиусом 1 (оба круга с границей). Система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих кругов не превосходит суммы радиусов, т.е. когда

$$\sqrt{\left(1-\frac{k}{5}\right)^2 + \left(-2+\frac{2k}{5}\right)^2} \le |k+5| + 1 .$$

Осталось решить полученное неравенство.

Вариант 12

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $(1; +\infty)$. **3.** $19/44$. **4.** 50%.

5. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. *Указание.* Первые два неравенства задают угол на плоскости Oxy. Прямые $y + ax = -1$ проходят через точку $(0; -1)$. Число a удовлетворяет условию, если прямая $y = -ax - 1$ пересекает обе стороны угла.

Вариант 13

1. $\left[0; \frac{15}{4}\right] \cup [4; +\infty)$.

2. 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей.

3. 36.

4. $\left(\log_2 49 - 4; \log_2 7\right)$. *Указание.* Введите переменную $t = \log_2\left(2^x - 3\right)$.

5. $\frac{\sqrt{356}-12}{6}$, $\frac{\sqrt{164}-12}{6}$. *Указание*. Уравнение приводится к виду

$$\cos\left(\pi\sqrt{6-4x-x^2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1 .$$

Отсюда

$$\pi\sqrt{6-4x-x^2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$$

т.е.

$$\sqrt{6-4x-x^2} = \frac{1}{3} + 2k, \text{ где } k = 0 \text{ или } k = 1.$$

6. $\arccos\left(6 - \sqrt{33}\right)$. Заметим, что центр O шара, вписанного в правильную пирамиду $SABCDEF$ с вершиной S, лежит на высоте SH пирамиды, а точка K касания вписанным шаром боковой грани SBC принадлежит апофеме этой грани. Пусть P и Q – середины противоположных ребер BC и EF основания, T – середина бокового ребра SA, R – радиус вписанного шара, r – радиусы шаров с центрами в серединах ребер, $SH = h$.

Рассмотрим сечение SPQ (рис.19). Поскольку $SP \perp BC$, $QP \perp BC$, то $\angle SPH$ – плоский угол искомого двугранного угла. Обозначим его величину через α.

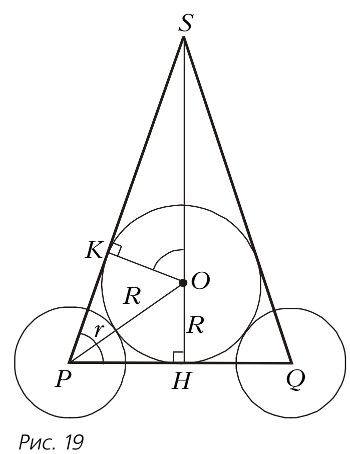


Рис. 19

Пусть a – длина стороны основания пирамиды, тогда $PH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Так как $OK \perp SP$, $SH \perp PQ$, то $\angle KOS = \angle SPH$. Отсюда $\Delta SKO \sim \Delta SPH$, следовательно,

$$\frac{OK}{SO} = \frac{PH}{SP}, \text{ т.е. } \frac{R}{h-R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} .$$

Возведение в квадрат в последнем равенстве приводит к соотношению

$$3a^2(h - 2R) = 4R^2 h . \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника OPH имеем

$$(R+r)^2 = R^2 + \frac{3}{4}a^2 \Leftrightarrow 4r^2 + 8Rr = 3a^2. \qquad (2)$$

Рассмотрим далее диагональное сечение SAD (рис.20). Имея в виду, что $AH = a$, по теореме косинусов для треугольника STO получаем

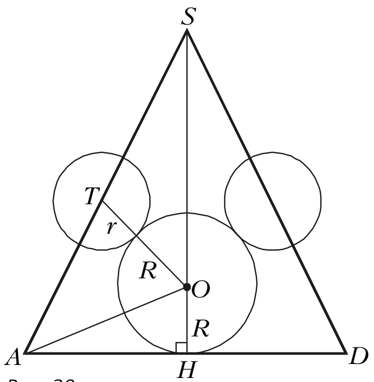


Рис. 20

$$(R+r)^2 = \frac{1}{4}\left(h^2 + a^2\right) + (h-R)^2 - h(h-R) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4r^2 + 8Rr = h^2 + a^2 - 4Rh. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), имеем

$$2a^2 = h^2 - 4Rh. \quad (4)$$

Теперь, исключая из (1) и (4) a^2, получаем

$$3h^2 - 18Rh + 16R^2 = 0.$$

После деления на R^2 и обозначения $t = \dfrac{h}{R}$, учитывая вытекающее из (4) условие $h > 4R$, приходим к системе

$$\begin{cases} 3t^2 - 18t + 16 = 0, \\ t > 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{9+\sqrt{33}}{3}.$$

Тогда из ΔSKO (см. рис. 19) имеем

$$\cos\alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{h-R} = \frac{1}{t-1} = \frac{3}{6+\sqrt{33}} = 6 - \sqrt{33}.$$

7. $u = -187$; $v = -819$. Так как $20020 = 364 \cdot 55$, $364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$, $55 = 5 \cdot 11$, то после деления почленно на 20020 приходим к биквадратному уравнению

$$a^4 + pa^2 - q = 0, \text{ где } p = \frac{u}{5 \cdot 11},\ q = \frac{v}{2^2 \cdot 7 \cdot 13}.$$

Пусть $t = a^2$. Биквадратное уравнение имеет четыре различных корня тогда и только тогда, когда корни t_1, t_2 уравнения $t^2 + pt - q = 0$ положительны и различны. В соответствии с теоремой Виета это равносильно системе условий

$$\begin{cases} p < 0, \\ q < 0, \\ D = p^2 + 4q > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 0, \\ v < 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Пусть $0 < t_1 < t_2$, тогда корнями исходного уравнения являются $\pm\sqrt{t_1}$, $\pm\sqrt{t_2}$. В силу условия задачи,

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{t_2} = 3:5 \Leftrightarrow 25t_1 = 9t_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\left(-p - \sqrt{D}\right) = 9\left(-p + \sqrt{D}\right) \Leftrightarrow -8p = 17\sqrt{D} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8^2 p^2 = 17^2\left(p^2 + 4q\right) \Leftrightarrow 9 \cdot 25p^2 = -17^2 \cdot 4q.$$

В исходных обозначениях получается равенство

$$3^2 \cdot 7 \cdot 13u^2 = 11^2 \cdot 17^2 \cdot (-v), \text{ где } u, v \in \boldsymbol{Z},\ u, v < 0.$$

Следовательно, u делится на 17 и 11, а v делится на 9, 7 и 13. Среди чисел такого вида наибольшими отрицательными являются $u = -17 \cdot 11 = -187$, $v = -9 \cdot 7 \cdot 13 = -819$.

Вариант 14

1. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 0; $\dfrac{15}{4}$; 4.

3. 17100 руб. и 11400 руб. **4.** 27.

5. $\left(\log_3 28 - 3;\ \log_3 4\right)$. **6.** $\dfrac{18+\sqrt{503}}{6}$; $\dfrac{18+\sqrt{335}}{6}$.

Вариант 15

1. $3 \pm 5\sqrt{3}/2$. **2.** $(-\infty; -8] \cup (12; +\infty)$.

3. $2\pi n$, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$, $2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Заменой $y = 2\sin x + \cos x$ уравнение приводится к виду $y^2 - 3y + 2 = 0$.

4. 3; $4098/61$.

Угол CBE в трапеции – острый, поэтому дуга CDE меньше 180°, а значит, для любой точки $X \in \overset{\cup}{CDE}$ будет $CX \le CE = 10$. Следовательно, точка A лежит на дуге CBE. При этом, поскольку $CB = DE < CE = 10$, точка A должна лежать между точками B и E (рис.21).

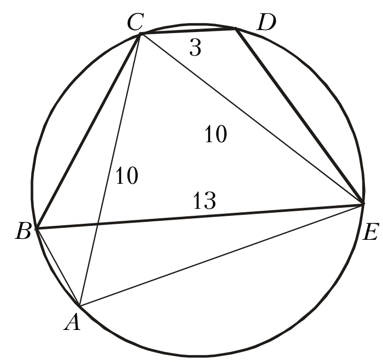


Рис. 21

Пользуясь равенством дуг, стягиваемых равными хордами, получаем $\overset{\cup}{BA} = \overset{\cup}{CBA} - \overset{\cup}{CB} = \overset{\cup}{CDE} - \overset{\cup}{DE} = \overset{\cup}{CD}$. Отсюда $BA = CD = 3$. Пусть $\angle ABE = \angle ACE = \alpha$. По теореме косинусов

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos\alpha = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{22}{122} = \frac{11}{61} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{60}{61},$$

после чего без труда вычисляется S_{ABCDE}.

5. $\varnothing$ при $a \le -\sqrt[4]{\dfrac{1}{12}}$;

$$\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \text{ при } -\sqrt[4]{\frac{1}{12}} < a < 0;$$

$$(0; +\infty) \text{ при } a = 0;$$

$$\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a}; +\infty\right) \text{ при } 0 < a \le \sqrt[4]{\frac{1}{12}};$$

$$(-\infty; +\infty) \text{ при } a > \sqrt[4]{\frac{1}{12}}.$$

Указание. Левая часть неравенства раскладывается на множители: $\left(x^2 + 2\right)\left(ax^2 + x + 3a^3\right)$.

Вариант 16

1. $(-1; 0) \cup \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **2.** $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $8\dfrac{3}{4}\%$. **4.** $7/8$. **5.** $\left(-2 - 2\sqrt{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ -2 + 2\sqrt{2}\right)$.

6. -1; $2/7$. *Указание.* Выполните замену $t = \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 6}$.

Вариант 17

1. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[3; 2\sqrt{3}\right)$. **2.** $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $2\pi - \arccos\frac{2}{5}$.

3. 4 км/ч, 8 км/ч, 12 км/ч.

4. $\left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left[3; 3^{\sqrt{13}}\right]$. *Указание.* После замены $t = \log_3 x$ неравенство приводится к виду

$$(1+t)\sqrt{\frac{t-1}{3(1+t)}} \le 2.$$

5. $\angle BOC = 112{,}5^\circ$.

6. $\{-1\} \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. Преобразуем данную систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ ax^3 + y^3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a\left(x^3 - 1\right) + a^3(1-x)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ a(x-1)\left(x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2\right) = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение последней системы приводит к рассмотрению трех случаев.

а) $a = 0$. Тогда система имеет бесконечно много решений вида $(t; 0)$, где $t \in \boldsymbol{R}$. Таким образом, значение $a = 0$ не является искомым. б) $x = 1$. Очевидно, система имеет решение $(1; 0)$ при любом a. в) Третий вариант сводится к системе

$$\begin{cases} y = a(1-x), \\ x^2 + x + 1 - a^2(x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a(1-x), \\ \left(a^2 - 1\right)x^2 - \left(2a^2 + 1\right)x + a^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $x = 1$ не удовлетворяет второму уравнению ни при каком значении параметра a. Поэтому искомыми являются те и только те значения a, при которых система в) имеет не более одного решения.

У этой системы уравнений при $a^2 = 1$ есть единственное решение $(0; a)$. Если же $a^2 \ne 1$ $(a \ne 0)$, то квадратное уравнение (а с ним и система) имеет не более одного решения при условии, что дискриминант

$$D = \left(2a^2 + 1\right)^2 - 4\left(a^2 - 1\right)^2 = 3\left(4a^2 - 1\right) \le 0,$$

что равносильно $0 < |a| \le \frac{1}{2}$.

7. $(\pi n; \pi n - 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Преобразуем выражение под радикалом:

$$A = 3 + 2x - 2y + 2xy - x^2 - y^2 = -(x - y - 1)^2 + 4.$$

Отсюда с учетом неотрицательности подкоренного выражения имеем $0 \le A \le 4$.

Заметив, что $\cos x \ne 0$, перепишем данное уравнение, переходя к переменной $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - \left(\sqrt{A} - 2\right)t + 2 - \sqrt{A} = 0.$$

Это уравнение может иметь решения лишь при условии неотрицательности дискриминанта:

$$\left(\sqrt{A} - 2\right)^2 - 4\left(2 - \sqrt{A}\right) \ge 0, \text{ т.е. } A \ge 4.$$

Сравнивая с полученным ранее ограничением, имеем $A = 4$. Тогда

$$\begin{cases} t = 0, \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, & n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n, \\ y = \pi n - 1, \end{cases} \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

1. На рисунке 22 сплошной линией показано положение сечения цилиндра вертикальной плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра, в тот момент времени t, когда доска, лежащая на нем, образует со столом угол α. Пунктирной линией изображено положение указанного сечения по прошествии небольшого промежутка времени Δt. Считая (как обычно это и делается при решении подобных задач) цилиндр, стол и доску твердыми телами, можно утверждать, что прямая, проходящая через вершину угла и центр сечения цилиндра, является биссектрисой угла α.

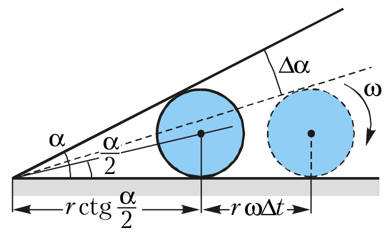


Рис. 22

Поскольку цилиндр катится по столу без проскальзывания с угловой скоростью ω и его ось остается параллельной оси вращения доски, ось цилиндра за промежуток времени Δt переместится на расстояние $\Delta s = r\omega\Delta t$, где r – радиус цилиндра, а доска повернется на угол $\Delta\alpha$. Учитывая, что выбранный промежуток времени Δt достаточно мал, можно считать, что угол $\Delta\alpha$ мал и вращение доски в течение этого промежутка времени неотличимо от равномерного. Поэтому, если искомую скорость вращения доски обозначить Ω, то $\Delta\alpha = \Omega\Delta t$. С другой стороны, из геометрии получим

$$r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha - \Delta\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) = r\omega\Delta t.$$

Поскольку $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, а синус малого угла равен самому углу (измеренному в радианной мере), искомая угловая скорость равна

$$\Omega = 2\omega\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

2. Будем решать задачу, полагая, что бочка покоится относительно инерциальной системы отсчета, а подъем диска осуществляется столь медленно, что можно пренебречь силами сопротивления движению диска со стороны воды. Когда диск находился на дне бочки, на него действовали сила тяжести, сила реакции дна и сила Архимеда (из-за шероховатости дна). Считая воду несжимаемой и полагая плотность воды равной $\rho_в = 1$ г/см^3, получим, что равнодействующая сил тяжести и гидростатического давления в этом случае должна быть равна $F_1 = \pi R^2 h(\rho - \rho_в)g$, где g – ускорение свободного падения. В силу симметрии диска можно утверждать, что эта сила приложена к центру тяжести диска.

После того как к диску прижали трубку, поршень подняли вверх и диск оторвался от дна бочки, сила реакции дна стала равной нулю, а на участок верхней плоскости диска, ограниченный контуром трубки, стали действовать силы со стороны трубки. Действие же сил гидростатического давления воды на этот участок прекратилось. По условию задачи, вплоть до момента отрыва в трубке под поршнем не должно находиться никакого вещества, поэтому результирующая сил гидростатического давления воды, действующих на диск, когда его верхняя плоскость оказалась на глубине x, должна была уменьшиться по сравнению с действовавшей на лежавший на дне бочки диск на величину $F_2 = \pi r^2 \left(\rho_{\text{в}} g x + p_{\text{а}}\right)$, где $p_{\text{а}}$ – атмосферное давление. Ясно, что сила $\vec{F}_2$ направлена вертикально вверх и приложена к точке диска, лежащей на его верхней плоскости и совпадающей с осью трубки.

На рисунке 23 показано сечение бочки вертикальной плоскостью, проходящей через центр диска и ось трубки. Здесь же изображены силы, действующие на диск (за исключением сил реакции со стороны стенок трубки) для случая, когда диск уже не касается дна, но еще не отрывается от трубки. При отрыве на диск со стороны трубки может действовать только сила реакции, приложенная в точке A. Запишем условие отрыва диска от трубки в виде

$$rF_2 = (b + r)F_1 .$$

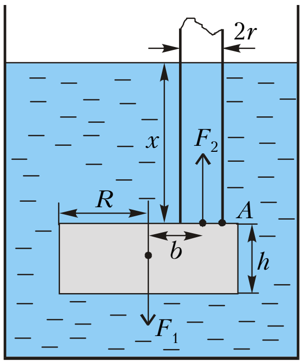


Рис. 23

Подставляя в это выражение ранее найденные значения сил F_1 и F_2 и полагая $p_{\text{а}} = 1$ атм, а $g = 9{,}8\ \text{м/с}^2$, определим искомую глубину отрыва:

$$x = \left(1 + \frac{b}{r}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_{\text{в}}} - 1\right)\frac{R^2 h}{r^2} - \frac{p_{\text{а}}}{\rho_{\text{в}} g} \approx 55\ \text{см} .$$

3. В положении равновесия сумма сил натяжения нити, действующих на блок, уравновешивает силу тяжести $M\vec{g}$, действующую на блок с прикрепленным к нему грузом. Поскольку нить гладкая, при смещении груза из положения равновесия блок не должен вращаться вокруг своей оси, а силы натяжения нити в точках, лежащих на горизонтальном диаметре блока, должны быть одинаковы. Более того, так как нить невесома, модуль силы натяжения нити при переходе от одной ее точки к другой должен оставаться постоянным.

В силу нерастяжимости нити, отсутствия вращения блока вокруг своей оси и жесткой связи оси блока с грузом можно утверждать, что дополнительные деформации первой (Δx_1) и второй (Δx_2) пружин при смещении груза по вертикали из положения равновесия на величину Δx должны удовлетворять соотношению $\Delta x = \left(\Delta x_1 + \Delta x_2\right)/2$, причем $k_1 \Delta x_1 = k_2 \Delta x_2$. Поскольку в задаче спрашивается, при каких амплитудах вертикальные колебания груза могут быть гармоническими, силами сопротивления движению частей системы следует пренебречь. Тогда на основании закона сохранения механической энергии можно утверждать, что приращение потенциальной энергии системы при максимальном смещении груза из равновесного положения должно быть равно кинетической энергии системы в равновесном положении. Так как массой пружин и нити по условию задачи следует пренебречь, а груз и жестко связанный с ним блок движутся поступательно, максимальная кинетическая энергия равна

$$W_{\text{к}\max} = \frac{Mv_{\max}^2}{2} ,$$

где $v_{\max}$ – максимальная скорость груза. При смещении груза вниз от равновесного положения на величину $\Delta x_{\max}$ приращение потенциальной энергии будет равно

$$\Delta W_{\text{п}\max} = -Mg\Delta x_{\max} + \frac{k_1\left(\left(\Delta x_{1\text{р}} + \Delta x_{1\max}\right)^2 - \Delta x_{1\text{р}}^2\right)}{2} + \frac{k_2\left(\left(\Delta x_{2\text{р}} + \Delta x_{2\max}\right)^2 - \Delta x_{2\text{р}}^2\right)}{2} ,$$

где $k_1 \Delta x_{1\text{р}} = k_2 \Delta x_{2\text{р}} = 0{,}5Mg$ и $\Delta x_{1\max} + \Delta x_{2\max} = 2\Delta x_{\max}$. Учитывая, что при гармонических колебаниях $v_{\max} = \omega \Delta x_{\max}$, из закона сохранения энергии следует, что частота малых вертикальных колебаний груза равна

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k_1 k_2}{\left(k_1 + k_2\right)M}} .$$

Наконец, поскольку максимальное ускорение груза, направленное вниз, не может превышать ускорения свободного падения (нить не может толкать блок вниз!) и амплитуда ускорения в ω^2 раз больше амплитуды колебаний, т.е. $\omega^2 \Delta x_{\max} \le g$, колебания груза могут оставаться гармоническими, если их амплитуда удовлетворяет неравенству

$$\Delta x_{\max} \le \frac{k_1 + k_2}{4k_1 k_2} Mg .$$

4. По условию задачи, шайба, двигаясь по поверхности ямки, периодически поднимается на одну и ту же высоту. Поэтому нужно считать, что при своем движении шайба не испытывает действия неконсервативных сил, а так как шайба является гладкой, сила реакции со стороны поверхности ямки может быть направлена только к центру ямки по ее радиусу. Учитывая также направление силы тяжести, действующей на шайбу, можно утверждать, что шайба должна двигаться в вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения стола и остающейся неподвижной, т.е. движение шайбы должно быть подобно движению грузика математического маятника.

По условию, максимальная высота подъема шайбы $h_{\max} = \left(1 - \cos\alpha_{\max}\right)R$ много меньше радиуса ямки R. Следовательно, максимальная величина угла, образуемого вертикалью и прямой, соединяющей шайбу с центром ямки (рис.24), мала: $\alpha_{\max} \ll 1$ рад, т.е. шайба совершает колебания с малой амплитудой. Тогда зависимость угла α от времени можно представить в виде $\alpha(t) = \alpha_{\max} \cos\omega t$ (где ω – частота колебаний), если считать, что в момент времени $t = 0$ шайба находилась на максимальной высоте. Согласно этому закону движения, шайба должна находиться на высоте h над дном ямки в такие моменты времени τ, которые удовлетворяют уравнению $h(\tau) = \left(1 - \cos\alpha(\tau)\right)R$, или, учитывая малость угла, $h(\tau) = \left(R\alpha_{\max}^2 \cos^2 \omega\tau\right)/2$. Поскольку $h(\tau) = h_{\max}/k$, получаем

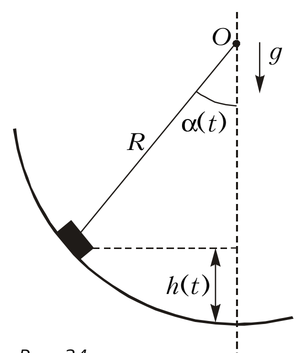


Рис. 24

$$\tau = \pm\frac{1}{\omega}\arccos\sqrt{\frac{1}{k}} + 2\pi N ,\ \text{где}\ N \in \mathbf{Z} .$$

Полагая, что при движении шайбы вверх угол α увеличивается, наиболее близкий к моменту времени $t = 0$ момент, когда движущаяся вверх шайба может оказаться на заданной высоте, равен $\tau_1 = -\frac{1}{\omega}\arccos\sqrt{\frac{1}{k}}$. Очевидно, что в следующий раз шайба окажется на той же высоте, двигаясь вниз, т.е. в момент времени $\tau_2 = \frac{1}{\omega}\arccos\sqrt{\frac{1}{k}}$. Так как за промежуток времени от τ_1 до τ_2 стол совершил n оборотов, период обращения стола должен быть равен $T = 2\tau_2/n$. Учитывая, что частота малых колебаний равна $\omega = \sqrt{g/R}$, находим искомый период обращения стола:

$$T = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{R}{g}}\arccos\sqrt{\frac{1}{k}} = \frac{\pi}{2n}\sqrt{\frac{R}{g}} .$$

5. Поскольку цилиндр является гладким и его ось вертикальна, после отпускания поршня и установления в цилиндре термодинамического равновесия давление газа $p_к$ должно компенсировать действие сил тяжести на поршень (по условию задачи, давление вне цилиндра равно нулю): $p_к S = Mg$.
На основании уравнения Клапейрона–Менделеева находим объем, занимаемый газом после установления нового равновесного состояния: $V_к = \nu RT_к / p_к$, где R – универсальная газовая постоянная, а $T_к$ – конечная температура неона. Следовательно, высота, на которой будет находиться поршень в конечном состоянии, больше первоначальной на величину $h = \left(V_к - V\right)/S$.
Как известно, неон (как и любой инертный газ) является одноатомным газом. Внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа равна $U = 1{,}5RT$ и не зависит от его объема.
На основании закона сохранения энергии можно записать $1{,}5\nu R\left(T_к - T_0\right) = -Mgh$. Решая это уравнение с учетом составленных ранее соотношений, находим, что температура неона после установления нового равновесного состояния равна

$$T_к = \frac{3T_0}{5} + \frac{2MgV}{5\nu RS}.$$

Из этого выражения следует, что поршень после отпускания не будет двигаться и температура неона не изменится, если в исходном состоянии $MgV = \nu RST_0$. Если же $MgV < \nu RST_0$, температура неона в конечном состоянии должна быть меньше первоначальной, а поршень должен был подняться вверх. В противном случае, конечная температура неона должна быть больше первоначальной. При этом увеличение внутренней энергии неона обусловлено работой над ним со стороны поршня, который в конечном состоянии должен оказаться на высоте, меньшей первоначальной.

6. Согласно приведенному графику температура газа на участке *1–2* повышается. Следовательно, газ на этом участке получает от нагревателя тепло в количестве
$Q_н = 11\nu R\left(T_2 - T_1\right)/6$, где ν – количество молей газа. На участках *2–3* и *3–1* газ отдает холодильнику количество теплоты

$$Q_х = 1{,}5\nu R\left(T_2 - T_3\right) + 2{,}5\nu R\left(T_3 - T_1\right) = \nu R\left(1{,}5T_2 + T_3 - 2{,}5T_1\right),$$

где T_3 – температура газа в точке *3*.
Полагая, что КПД машины, работающей по указанному циклу, равен КПД цикла, можно утверждать, что

$$\eta = 1 - \frac{Q_х}{Q_н} = \frac{4T_1 + 2T_2 - 6T_3}{11\left(T_2 - T_1\right)}.$$

Учитывая, что $n = T_2/T_1$, находим

$$T_3 = \frac{4 + 2n - 11(n-1)\eta}{6} T_1.$$

По условию задачи, используемый в качестве рабочего тела газ является идеальным одноатомным. Поскольку на участке *2–3* молярная теплоемкость газа равна $1{,}5R$, можно утверждать, что на этом участке газ охлаждался изохорически, значит, отношение давлений газа в точках *2* и *3* равно отношению температур газа в этих точках. На участке *3–1* молярная теплоемкость газа равна $2{,}5R$. Поэтому охлаждение газа на этом участке должно происходить изобарически, т.е. при неизменном давлении, а потому $p_1 = p_3$. Следовательно, искомое отношение давлений равно

$$x = \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3} = n\frac{T_1}{T_3} = \frac{6n}{4 + 2n - 11(n-1)\eta}.$$

7. Согласно классической теории, электропроводность металлов обусловлена наличием в них свободных электронов, которые под действием постоянного электрического поля дрейфуют с постоянной скоростью в направлении, противоположном направлению этого поля. Поэтому, если обозначить концентрацию свободных электронов n, величину скорости дрейфа v, модуль заряда электрона e, а площадь поперечного сечения проводника S, то сила тока I, текущего по проводнику, равна $I = envS$.
Как известно, сопротивление однородного проводника длиной L и площадью поперечного сечения S равно $R = \rho L/S$, где ρ – удельное сопротивление материала проволоки. Учитывая, что проволоки изготовлены из одного и того же материала с малым температурным коэффициентом, следует считать удельные сопротивления проволок неизменными и одинаковыми.
При параллельном подключении проволок к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}$ в каждой из них течет ток $I_i = \mathcal{E}/R_i$, или $envS_i = \mathcal{E}S_i/(\rho L_i)$, где v – скорость дрейфа носителей в этом случае. Из этого выражения следует, что обе проволоки имеют одну и ту же длину L.
При последовательном соединении проволок сила тока в проволоках должна быть одинаковой и равной
$I = env_1S_1 = en(v/k)S_1 = env_2S_2$, так как скорость дрейфа носителей в первой проволоке во втором случае в k раз меньше, чем в первом случае. С другой стороны, при последовательном соединении должно выполняться соотношение

$$\mathcal{E} = I\left(R_1 + R_2\right) = I\rho L\left(S_1^{-1} + S_2^{-1}\right) = en\rho L\left(v_1 + v_2\right) = en\rho Lv.$$

Следовательно, $v_2 = (k-1)v_1$, а искомое отношение диаметров проволок равно

$$x = \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = \sqrt{k-1} = 2.$$

8. На движущиеся в магнитном поле вместе с проволокой свободные носители заряда действует сила Лоренца, равная $F_Л = qvB$, где q – заряд носителя, и направленная перпендикулярно скорости носителя и индукции магнитного поля. Под действием этой силы происходит перераспределение зарядов, в результате чего возникает электрическое поле, стремящееся скомпенсировать действие силы Лоренца. При установившемся движении в каждой точке проволоки должно существовать электрическое поле, напряженность которого равна
$E = F_Л/q = vB$ и направлена против силы Лоренца. Поэтому точки, лежащие в поперечном сечении проволоки, не будут эквипотенциальными. Однако, считая проволоку достаточно тонкой, разностью потенциалов между точками одного и того же поперечного сечения можно пренебречь. Вместе с тем, можно утверждать, что на участке проволоки, находящемся между цилиндрами с радиусами R и r, будет существовать электрическое поле, величина составляющей которого, направленной по радиусу цилиндра, равна
$E(\rho) = v(\rho)B = v\rho B/R$, где ρ – удаление точки провода от оси вращения. На рисунке 25 приведена зависимость величины этой составляющей от ρ. Приращение разности потенциалов между столь близкими точками, находящимися на расстоянии $\Delta\rho$ в направлении действия поля, что напряженность поля $E(\rho)$ между ними можно считать постоянной, равно
$\Delta\varphi(\rho, \rho + \Delta\rho) = -E(\rho)\Delta\rho$.
Тогда получим, что искомая разность потенциалов должна быть равна

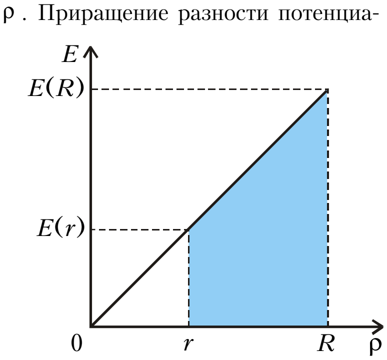


Рис. 25

площади выделенной на рисунке трапеции:

$$\Delta\varphi(r, R) = \frac{E(R)+E(r)}{2}(R-r) = \frac{vB}{2R}\left(R^2 - r^2\right),$$

причем потенциал верхнего конца проволоки больше, чем потенциал точки проволоки, прикрепленной к грузу.

9. Поскольку падающий на линзу, параллельно ее главной оптической оси, пучок света является узким, т.е. радиус пучка R много меньше фокусного расстояния F линзы, то после прохождения собирающей линзы все лучи этого пучка должны пройти через главный фокус F, находящийся за линзой. Если же линза рассеивающая, то выходящий из линзы пучок должен быть расходящимся, а продолжения выходящих из линзы лучей должны пересекаться перед линзой в ее главном фокусе. По условию задачи, диаметр r светового пучка на экране, стоящем за линзой, меньше R. Следовательно, используемая линза является собирающей, а экран может находиться либо ближе фокуса (на экран падает сходящийся пучок), либо дальше фокуса (падающий на экран пучок света является расходящимся). По условию задачи, после погружения линзы вместе с экраном в жидкость с показателем преломления n_1 диаметр светового пучка на экране не изменяется, а потому из двух рассмотренных случаев возможен лишь второй случай.

На рисунке 26 показано сечение линзы $Л$ и экрана $Э$ плоскостью, содержащей главную оптическую ось OF линзы.

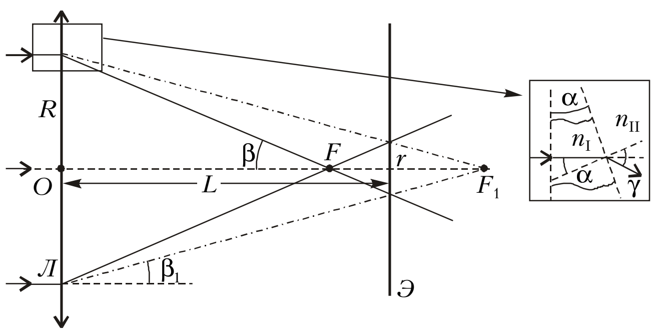


Рис. 26

Сплошными линиями показан ход двух крайних лучей пучка, выходящего из находящейся в воздухе линзы, а пунктиром изображены крайние лучи пучка, выходящего из линзы, погруженной в жидкость (эти лучи должны были бы пересечься в точке F_1 – главном фокусе линзы, находящейся в жидкости). Поскольку $R \ll F < F_1$, углы отклонения крайних лучей пучка после преломления в линзе (β – в случае, когда линза находилась в воздухе, и β_1 – в жидкости) малы.

В квадратной рамке на рисунке 26 изображен столь малый кусочек линзы, что часть его сферической поверхности практически неотличима от соприкасающейся с линзой в данном месте плоскости. Сплошной линией со стрелками показан ход падающего и выходящего из изображенного на рисунке кусочка линзы луча. По условию задачи, пучок падает нормально на плоскую поверхность линзы, поэтому внутри линзы лучи не изменяют своего направления, а испытывают преломление только на сферической поверхности. По закону преломления величины угла падения α и угла преломления γ на плоской границе двух однородных изотропных сред с абсолютными показателями преломления n_{I} и n_{II} должны удовлетворять соотношению $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{n_{\mathrm{II}}}{n_{\mathrm{I}}}$. Учитывая, что углы отклонения β и β_1 малые, в соответствии с соотношением $\gamma_i = \alpha + \beta_i$, можно записать

$$\beta = (n-1)\alpha \text{ и } \beta_1 = \left(n/n_1 - 1\right)\alpha.$$

Обратившись к рисунку 26 и учитывая последнее замечание, получим

$$R = \beta F = \beta_1 F_1 \text{ и } k^{-1} = r/R = L/F - 1 = 1 - L/F_1,$$

где L – расстояние от линзы до экрана.

Отсюда найдем

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{(n-1)n_1}{n-n_1} = \frac{F_1}{F} = \frac{1+k}{k-1},$$

а потому искомый показатель преломления стекла линзы равен

$$n = \frac{2n_1}{1+k+(1-k)n_1}.$$

10. На рисунке 27 схематически показано расположение точечного источника S, экрана $Э_1$ с отверстиями O_1, O_2 и второго экрана $Э_2$. Поскольку источник является точечным и посылает свет на два малых отверстия, в соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля следует считать, что эти отверстия являются точечными вторичными когерентными источниками. Поэтому на втором экране должны наблюдаться две накладывающиеся друг на друга интерференционные картины, соответствующие длинам волн λ_1 и λ_2. Как известно, результат интерференции определяется разностью фаз налагающихся колебаний: при разности фаз, кратной 2π, будет наблюдаться интерференционный максимум, а при разности фаз, кратной нечетному числу π, – интерференционный минимум. В однородной изотропной среде разность фаз налагающихся колебаний однозначно определяется разностью хода приходящих в данную точку лучей. Поскольку отверстия в первом экране расположены симметрично относительно источника S, то вторичные источники O_1 и O_2 следует считать синфазными, а разность хода δ лучей, попадающих от этих источников в точку наблюдения A, как это видно из рисунка 27, равна

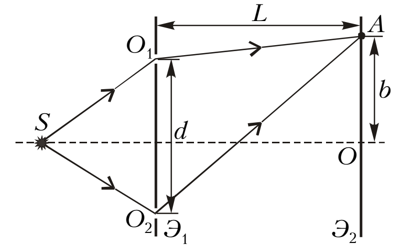


Рис. 27

$\delta = O_2A - O_1A$, где $O_1A = \sqrt{L^2 + (b - d/2)^2}$, $O_2A = \sqrt{L^2 + (b + d/2)^2}$. По условию задачи, $L = 70$ см $\gg b = 5$ см, поэтому, пользуясь формулой приближенного вычисления $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$, справедливой при условии $\varepsilon \ll 1$, разность хода δ с достаточной степенью точности можно вычислить следующим образом:

$$\delta \approx \left(1 + 0{,}5\left(\frac{b+d/2}{L}\right)^2 - 1 - 0{,}5\left(\frac{b-d/2}{L}\right)^2\right)L = \frac{bd}{L}.$$

В точке A должен иметь место интерференционный максимум для одной длины волны и интерференционный минимум для другой длины волны, поэтому должно выполняться соотношение

$$\delta = \frac{2n+1}{2}\lambda_1 = n\lambda_2.$$

Отсюда находим порядок интерференционного максимума для второй длины волны:

$$n = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

и искомое расстояние между отверстиями:

$$d \approx \frac{L\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_2 - \lambda_1)b} \approx 4 \text{ мм}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\Delta l_{max} = \sqrt{mga/k} \Big/ \left(\sqrt{2}+1\right) \approx 4{,}1$ см.

2. $v_0 = \sqrt{2\mu g L\left(\frac{M}{m}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)+1-\alpha\right)} = 1$ м/с.

3. $\alpha = \pi/4 \approx 0{,}8$.

4. $v_{ср} = \frac{3x_0}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 0{,}48$ м/с.

5. $T_2 = T_1\frac{H}{h} + \frac{MkH(H-h)}{mR} = 487{,}5$ К.

6. $\alpha = \frac{3}{2}\frac{M_{Ne}-M_{He}}{M_{Ne}-3M_{He}} = 3$.

7. $m = \frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 gR^2}\left(\frac{2R}{h}\right)^{3/2}$.

8. $Q = \frac{\mathcal{E}^2 R_1^3 L}{2(R+R_1)(rR+rR_1+RR_1)^2} = 1{,}14$ Дж.

9. $l = \frac{d}{2\alpha(n-1)} \approx 50$ см.

10. $F = \frac{2l_1l_2(l_1+l_2)}{(l_1-l_2)^2} = 120$ см.

Химический факультет

1. $N_1 = Nv/(v+u) = 50$.

2. $m = \rho a_2^2(a_2-a_1) + \left(m_1a_2^2/a_1^2 - m_2\right) \approx 4{,}1$ кг.

3. $\Delta T = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2N-1}\right) \approx 0{,}3$ К, где $\alpha = 2\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$.

4. $A = RT(k-1)/k = 1250$ Дж.

5. $A = 1{,}5p_1V_1 = 300$ Дж.

6. $m = \frac{p_0MS}{RT}\frac{p_0S-Mg}{k} = 11{,}7$ г.

7. $q = \varepsilon_0(\varepsilon-1)UV/l^2 = 3{,}6\cdot10^{-8}$ Кл.

8. $r = 3H\Big/\left(2\sqrt{n^2-1}\right) \approx 3{,}4$ м.

9. $\varphi = \arcsin\left(1\Big/\sqrt{1+n^2}\right)$.

10. $q_{max} = 4\pi\varepsilon_0R(hc/\lambda - A)/e \approx 2\cdot10^{-11}$ Кл.

Октаэдр из шести углов

(Начало см. на 4-й странице обложки. Автор головоломки – А.Калинин)

В этой простой, на первый взгляд, головоломке спрятан один секрет – в одиночку, т.е. двумя руками, ее собрать невозможно, даже глядя на картинку с решением. Нужна по крайней мере еще одна рука. Пока вы не вставите шестой уголок, который сделает конструкцию жесткой, даже правильно зацепленные элементы будут стараться выскользнуть из ваших рук, заставляя начинать все сначала.

Чтобы преодолеть эту трудность, москвичка Ирина Новичкова, автор многих головоломок, предлагает надевать на концы проволок не по одному, а по два шарика с расстоянием между ними, равным диаметру шарика. Такую конструкцию легче удержать в руках, и головоломку можно решать в одиночку.

Еще меньше времени требуется для изготовления головоломки, состоящей из трех согнутых под углом 60° кусочков проволоки, из которых требуется собрать тетраэдр.

Если кому-нибудь из читателей удастся придумать и собрать из уголков головоломки в форме других многогранников, просим написать об этом в редакцию и прислать соответствующие модели.

В заключение два совета по изготовлению: проволоку лучше брать жесткую, диаметром 1–2 мм, углы сгиба для головоломки-октаэдра делать немного больше 90°, а для тетраэдра – немного больше 60°.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.В.Власов, Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Е.А.Силина, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области Заказ №