Из прямоугольного треугольника OPH имеем

$$\left(R+r\right)^2 = R^2 + \frac{3}{4}a^2 \Leftrightarrow 4r^2 + 8Rr = 3a^2. \qquad (2)$$

Рассмотрим далее диагональное сечение SAD (рис.20). Имея в виду, что $AH = a$, по теореме косинусов для треугольника STO получаем

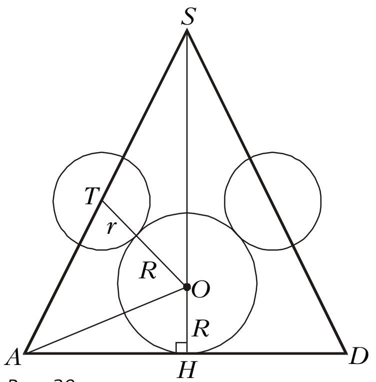

Рис. 20

$$\left(R+r\right)^2 = \frac{1}{4}\left(h^2+a^2\right) + \left(h-R\right)^2 - h\left(h-R\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4r^2 + 8Rr = h^2 + a^2 - 4Rh. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), имеем

$$2a^2 = h^2 - 4Rh. \quad (4)$$

Теперь, исключая из (1) и (4) a^2, получаем

$$3h^2 - 18Rh + 16R^2 = 0.$$

После деления на R^2 и обозначения $t = \dfrac{h}{R}$, учитывая вытекающее из (4) условие $h > 4R$, приходим к системе

$$\begin{cases} 3t^2 - 18t + 16 = 0, \\ t > 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{9+\sqrt{33}}{3}.$$

Тогда из ΔSKO (см. рис. 19) имеем

$$\cos\alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{h-R} = \frac{1}{t-1} = \frac{3}{6+\sqrt{33}} = 6 - \sqrt{33}.$$

7. $u = -187$; $v = -819$. Так как $20020 = 364 \cdot 55$, $364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13$, $55 = 5 \cdot 11$, то после деления почленно на 20020 приходим к биквадратному уравнению

$$a^4 + pa^2 - q = 0, \text{ где } p = \frac{u}{5\cdot 11},\ q = \frac{v}{2^2\cdot 7\cdot 13}.$$

Пусть $t = a^2$. Биквадратное уравнение имеет четыре различных корня тогда и только тогда, когда корни t_1, t_2 уравнения $t^2 + pt - q = 0$ положительны и различны. В соответствии с теоремой Виета это равносильно системе условий

$$\begin{cases} p < 0, \\ q < 0, \\ D = p^2 + 4q > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 0, \\ v < 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Пусть $0 < t_1 < t_2$, тогда корнями исходного уравнения являются $\pm\sqrt{t_1}$, $\pm\sqrt{t_2}$. В силу условия задачи,

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{t_2} = 3:5 \Leftrightarrow 25t_1 = 9t_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\left(-p-\sqrt{D}\right) = 9\left(-p+\sqrt{D}\right) \Leftrightarrow -8p = 17\sqrt{D} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8^2p^2 = 17^2\left(p^2+4q\right) \Leftrightarrow 9\cdot 25p^2 = -17^2\cdot 4q.$$

В исходных обозначениях получается равенство

$$3^2\cdot 7\cdot 13u^2 = 11^2\cdot 17^2\cdot(-v), \text{ где } u,v \in \mathbf{Z},\ u,v < 0.$$

Следовательно, u делится на 17 и 11, а v делится на 9, 7 и 13. Среди чисел такого вида наибольшими отрицательными являются $u = -17\cdot 11 = -187$, $v = -9\cdot 7\cdot 13 = -819$.

Вариант 14

1. $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$, $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $k,n \in \mathbf{Z}$. **2.** 0; $\dfrac{15}{4}$; 4.

3. 17100 руб. и 11400 руб. **4.** 27.

5. $\left(\log_3 28 - 3;\ \log_3 4\right)$. **6.** $\dfrac{18+\sqrt{503}}{6}$; $\dfrac{18+\sqrt{335}}{6}$.

Вариант 15

1. $3 \pm 5\sqrt{3}/2$. **2.** $(-\infty; -8] \cup (12; +\infty)$.

3. $2\pi n$, $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi n$, $2\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$. *Указание*. Заменой $y = 2\sin x + \cos x$ уравнение приводится к виду $y^2 - 3y + 2 = 0$.

4. 3; $4098/61$.

Угол CBE в трапеции – острый, поэтому дуга CDE меньше 180°, а значит, для любой точки $X \in \overset{\cup}{CDE}$ будет $CX \le CE = 10$. Следовательно, точка A лежит на дуге CBE. При этом, поскольку $CB = DE < CE = 10$, точка A должна лежать между точками B и E (рис.21).

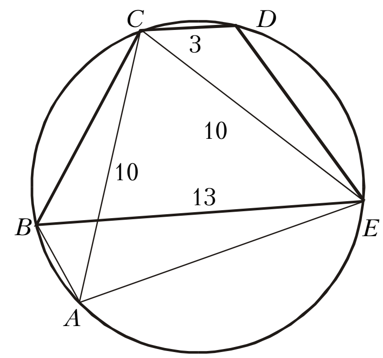

Рис. 21

Пользуясь равенством дуг, стягиваемых равными хордами, получаем $\overset{\cup}{BA} = \overset{\cup}{CBA} - \overset{\cup}{CB} = \overset{\cup}{CDE} - \overset{\cup}{DE} = \overset{\cup}{CD}$. Отсюда $BA = CD = 3$. Пусть $\angle ABE = \angle ACE = \alpha$. По теореме косинусов

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB\cdot BE\cdot\cos\alpha = AC^2 + CE^2 - 2AC\cdot CE\cdot\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{22}{122} = \frac{11}{61} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{60}{61},$$

после чего без труда вычисляется S_{ABCDE}.

5. $\varnothing$ при $a \le -\sqrt[4]{\dfrac{1}{12}}$;

$$\left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};\ \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \text{ при } -\sqrt[4]{\frac{1}{12}} < a < 0;$$

$$(0; +\infty) \text{ при } a = 0;$$

$$\left(-\infty;\ \frac{-1-\sqrt{1-12a^4}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{1-12a^4}}{2a};\ +\infty\right) \text{ при } 0 < a \le \sqrt[4]{\frac{1}{12}};$$

$$(-\infty; +\infty) \text{ при } a > \sqrt[4]{\frac{1}{12}}.$$

Указание. Левая часть неравенства раскладывается на множители: $\left(x^2+2\right)\left(ax^2 + x + 3a^3\right)$.

Вариант 16

1. $(-1;0) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **2.** $(-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $8\dfrac{3}{4}\%$. **4.** $7/8$. **5.** $\left(-2-2\sqrt{2};\ 0\right) \cup \left(0;\ -2+2\sqrt{2}\right)$.