7π, 8π, 9π, 10π вида x_1 и корень $x_2 = \frac{39}{4}\pi$, т.е. ровно шесть корней.

Пусть $a > 3$. Учитывая неравенство $a < 1 + \sqrt{6{,}5}$, получаем, что левая граница заданного отрезка удовлетворяет условию

$$6\pi < 2a\pi < 2\left(1 + \sqrt{6{,}5}\right)\pi < 8\pi.$$

Тогда для наличия ровно шести корней необходимо и достаточно, чтобы

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}6 < 2a \le 7,\\ 11 \le a^2 + 1 < 2;\end{cases}\\ \begin{cases}7 < 2a < 2\left(1+\sqrt{6{,}5}\right),\\ 12 \le a^2 + 1 < 13,\end{cases}\end{array}\right.$$

т.е. $\sqrt{10} \le a < \sqrt{11}$.

Вариант 11

1. $\left[-\sqrt{10}; -3\right) \cup \left(3; \sqrt{10}\right]$. *Указание*. Докажите, что $0 < \sqrt{31} - \sqrt{21} < 1$.

2. $\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right) + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. -9. *Указание.* Положим $b = a + d$, $c = a + 2d$. Выразив минимизируемое выражение через a и d, получим

$$2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a = a^2 + 6a = (a+3)^2 - 9.$$

Последнее выражение достигает минимума, равного -9, при $a = -3$. Осталось показать, что для этого a можно подобрать такое d, что числа $a - c = -2d$, $c - b = d$, $2a = -6$ образует геометричесую прогрессию.

4. $2\sqrt{3}$. *Указание*. Смежные стороны ромба, а значит, и опирающиеся на них треугольники симметричны относительно одной из диагоналей ромба (рис.18). Поэтому четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником со сторонами, параллельными диагоналям ромба.

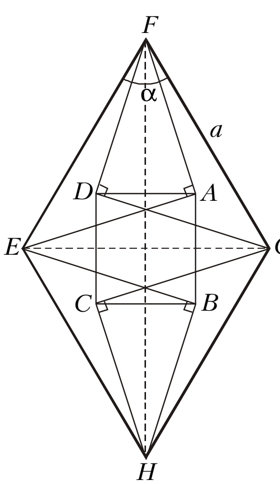

Рис. 18

5. 3. *Указание.* Поскольку $-1 \le 2^x - 7 \le 1$, то $x \le 3$, но тогда $\frac{6\pi}{x} \ge 2\pi$. Однако левая часть уравнения не больше чем 2π, что возможно только при $x = 3$.

6. $\boldsymbol{Z} \setminus \{-11; -10; \ldots; -4; -3\}$. *Указание*. Первое неравенство задает на координатной плоскости Oxy круг с центром $(1; -2)$ и радиусом $|k + 5|$, второе – круг с центром $\left(\frac{k}{5}; -\frac{2k}{5}\right)$ и радиусом 1 (оба круга с границей). Система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих кругов не превосходит суммы радиусов, т.е. когда

$$\sqrt{\left(1 - \frac{k}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2k}{5}\right)^2} \le |k+5| + 1.$$

Осталось решить полученное неравенство.

Вариант 12

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $(1; +\infty)$. **3.** $19/44$. **4.** 50%.

5. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. *Указание.* Первые два неравенства задают угол на плоскости Oxy. Прямые $y + ax = -1$ проходят через точку $(0; -1)$. Число a удовлетворяет условию, если прямая $y = -ax - 1$ пересекает обе стороны угла.

Вариант 13

1. $\left[0; \frac{15}{4}\right] \cup [4; +\infty)$.

2. 2 млн. 400 тыс. рублей и 3 млн. 600 тыс. рублей.

3. 36.

4. $\left(\log_2 49 - 4; \log_2 7\right)$. *Указание.* Введите переменную $t = \log_2\left(2^x - 3\right)$.

5. $\frac{\sqrt{356} - 12}{6}$, $\frac{\sqrt{164} - 12}{6}$. *Указание*. Уравнение приводится к виду

$$\cos\left(\pi\sqrt{6 - 4x - x^2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Отсюда

$$\pi\sqrt{6 - 4x - x^2} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$$

т.е.

$$\sqrt{6 - 4x - x^2} = \frac{1}{3} + 2k, \text{ где } k = 0 \text{ или } k = 1.$$

6. $\arccos\left(6 - \sqrt{33}\right)$. Заметим, что центр O шара, вписанного в правильную пирамиду $SABCDEF$ с вершиной S, лежит на высоте SH пирамиды, а точка K касания вписанным шаром боковой грани SBC принадлежит апофеме этой грани. Пусть P и Q – середины противоположных ребер BC и EF основания, T – середина бокового ребра SA, R – радиус вписанного шара, r – радиусы шаров с центрами в серединах ребер, $SH = h$.

Рассмотрим сечение SPQ (рис.19). Поскольку $SP \perp BC$, $QP \perp BC$, то $\angle SPH$ – плоский угол искомого двугранного угла. Обозначим его величину через α.

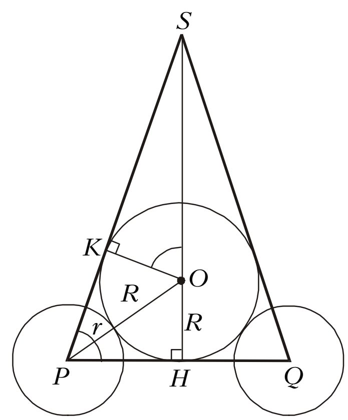

Рис. 19

Пусть a – длина стороны основания пирамиды, тогда $PH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Так как $OK \perp SP$, $SH \perp PQ$, то $\angle KOS = \angle SPH$. Отсюда $\Delta SKO \sim \Delta SPH$, следовательно,

$$\frac{OK}{SO} = \frac{PH}{SP}, \text{ т.е. } \frac{R}{h-R} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}}.$$

Возведение в квадрат в последнем равенстве приводит к соотношению

$$3a^2(h - 2R) = 4R^2h. \qquad (1)$$