BH. Поэтому

$$S_{DMC} = \frac{1}{4}S_{ABC}.$$

6. $-\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{3}$, ± 1, $\pm\sqrt{3}$. *Указание*. Перепишем систему:

$$\begin{cases}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{6-2a^2}\,x\right),\\ \cos x = \left(a-\frac{2}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{6-2a^2}\,x\right).\end{cases}$$

1) Если единственное на $[0;\ 2\pi]$ решение x не совпадает с $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то из первого уравнения последней системы вытекает, что числа x и $\frac{\pi}{2}-\sqrt{6-2a^2}\,x$ имеют равные по модулю ненулевые косинусы, и тогда второе уравнение приводит к равенству $a-\frac{2}{3}=\pm 1$, т.е. $a=-\frac{1}{3}$ или $a=\frac{5}{3}$.

Убедитесь, что при $a=-\frac{1}{3}$ уравнение действительно имеет единственное решение на отрезке $[0;\ 2\pi]$, а при $a=\frac{5}{3}$ такое решение не единственно.

2) Если $\frac{\pi}{2}$ – единственное решение системы на $[0;\ 2\pi]$, то $a=\pm\sqrt{3}$.

3) Если $x=\frac{3\pi}{2}$ – единственное решение системы на $[0;\ 2\pi]$, то

$$-1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{6-2a^2}\,\frac{3\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\sqrt{6-2a^2}\,\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-2a^2}=-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}n,\ n\in\boldsymbol{Z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-2a^2}=\frac{2}{3},\ 2\Leftrightarrow a=\pm\frac{5}{3},\ \pm 1.$$

Осталось проверить найденные значения a.

Вариант 9

1. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** -1. **3.** $(3;\ 4]$. **4.** $\left(2\sqrt{3}-3\right)/6$.

5. $2\pi n < x < \frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Неравенство приводится к виду

$$\left(\log_\pi(\sin x)-\log_\pi(\sin 2x)\right)^2\ge 0,$$

а последнее неравенство верно на всей области допустимых значений.

6. Нельзя. Возьмем систему координат с началом в угловом дереве и осями, направленными вдоль сторон участка (рис.17). Два других дерева должны располагаться вне круга с центром в O и радиусом 2,5, т.е. на выделенном на рисунке участке. Разница абсцисс этих деревьев получится меньше 2, а разница ординат – не больше 1. Следовательно, расстояние между ними будет меньше $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}<2{,}5$, т.е. задание выполнить нельзя.

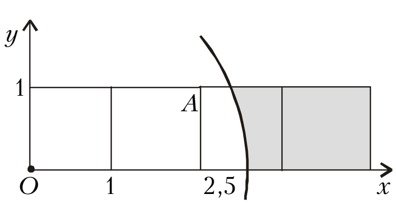

Рис. 17

Вариант 10

1. $(1;\ 2]\cup(7;\ 8)$. **2.** $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$, $n,k\ge 0$.

3. $3\pm\sqrt{5}$.

4. а) $\frac{16}{3}$, центр вне треугольника;

б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$, центр внутри треугольника.

5. $(1;\ 5)$; $\left(\frac{5}{2};\ 2\right)$. *Указание.* Перейдите к переменным $u=\frac{xy}{2}$, $v=2x+y-xy$.

6. 7 ч; 55 км. Выберем прямоугольную систему координат с центром в точке C. Без уменьшения общности можно считать, что точка A находится на положительной полуоси абсцисс, а точка B – на положительной полуоси ординат. Тогда, поскольку по условию $AC = CB = 275$ (км), через время t (ч) после начала движения координаты первого мотоциклиста суть $(275-44t;\ 0)$, а второго – $(0;\ 275-33t)$. Квадрат расстояния $r(t)$ между этими точками равен

$$r^2(t)=(275-44t)^2+(275-33t)^2=$$

$$=11^2\left((25-4t)^2+(25-3t)^2\right)=55^2\left(t^2-14t+50\right).$$

Минимум функции

$$r(t)=55\sqrt{t^2-14t+50}$$

в силу свойств квадратного трехчлена достигается при $t_0=7$ и равен

$$r(t_0)=55\sqrt{49-98+50}=55.$$

7. $\frac{3}{4}$. *Указание.* Так как сфера в точке A касается плоскости ABC, ее диаметр AD перпендикулярен этой плоскости. Сечением сферы плоскостью ABD является окружность с диаметром AD, для которой AB – касательная, а BD – секущая. Из прямоугольного треугольника ABD находим BD, а затем BM. Аналогично находим отрезки CD и CN, а потом и MN из треугольника DMN.

8. $\{3\}\cup\left[\sqrt{10};\ \sqrt{11}\right)$. Решение данного уравнения – это две непересекающиеся серии

$$\left[\begin{aligned}x_1&=\pi n,\\ x_2&=\frac{13}{4}(2\pi n+1),\end{aligned}\right.\qquad n\in\boldsymbol{Z}.$$

Заметим, что расстояние между соседними точками первой серии равно π, а второй – $\frac{13\pi}{2}$. Длина отрезка, указанного в условии задачи,

$$l=\left(a^2+1\right)\pi-2a\pi=(a-1)^2\pi.$$

Всякий отрезок, длина которого $l<4\pi$, содержит не более четырех корней первой серии и не более одного – второй. Если же $l\ge 6{,}5\pi$, то отрезок такой длины содержит как минимум шесть корней первой серии и по крайней мере один – второй. Таким образом, ровно шесть различных корней уравнения на данном отрезке могут быть лишь при условии

$$4\pi\le(a-1)^2\pi<6{,}5\pi\Leftrightarrow 2\le|a-1|<\sqrt{6{,}5}.$$

Принимая во внимание условие задачи $a\ge 1$, имеем $3\le a<1+\sqrt{6{,}5}$.

Если $a=3$, то отрезок $[6\pi;\ 10\pi]$ содержит пять корней 6π,