8. $\frac{mk}{l}$. *Указание.* Пусть $NA \perp OL$, $NB \perp OM$, $NC \perp KM$, $ND \perp LM$; $NA = k$, $NB = m$, $NC = l$, $ND = n$.
Проведем отрезки NK и NM. Тогда $\Delta NKA \sim \Delta NMD$ (в этих прямоугольных треугольниках $\angle NKA = \angle NML$ как вписанные, опирающиеся на дугу NL).
Другая пара подобных прямоугольных треугольников имеет те же гипотенузы NK и NM: $\Delta NKC \sim \Delta NMB$ (угол NMB между хордой и касательной равен вписанному углу NKM, опирающемуся на дугу NM).
Из этих двух подобий следует

$$\frac{k}{n} = \frac{NK}{NM} = \frac{l}{m} \Rightarrow mk = ln.$$

Вариант 6

1. $\pi n - 2,\ n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $(-\infty; 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$.

3. $-1;\ 2/3$. **4.** $\frac{a}{2}\sqrt{kl}$. **5.** $(-\infty; -2)$. **6.** $\frac{80}{3}$.

7. $\frac{3\pi}{2}$ при $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, при других a решений нет.
Указание. Приведите уравнение к виду

$$\cos 2x - \cos 2(x+a) = \sin a - 3.$$

Последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 2(x+a) = 1,\ \sin a = 1. \end{cases}$$

8. Продолжим прямую MN ($MN \| AC$ по условию) до пересечения с окружностями (рис.15), тогда $AEFC$ – прямоугольник ($\angle AEN$ и $\angle MFC$ опираются на диаметры).
Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $EA = FC = a$. Тогда $\angle EMA = \alpha$, $\angle FNC = \beta$, EN и PQ – пересекающиеся хорды одной окружности, MF и PQ – другой. Следовательно,

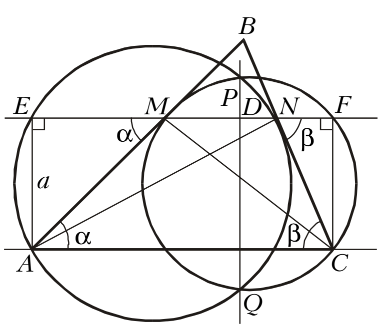

Рис. 15

$ED \cdot DN = DP \cdot DQ$, $MD \cdot DF = DP \cdot DQ$, откуда получаем, что $ED \cdot DN = MD \cdot DF$. Подставив в эту формулу выражения $ED = EM + MD = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha + MD$, $DF = DN + NF = DN + a\,\mathrm{ctg}\,\beta$, находим $\frac{MD}{DN} = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{ctg}\,\beta}$. Если $\frac{MD}{DN} = \sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Вариант 7

1. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.
2. 1. *Указание.* Пусть $\angle A = \angle C = 2\alpha$. Тогда по теореме синусов

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{DC}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

3. $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,2x + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}\,3x$.
4. 2. *Указание.* Левая часть уравнения не больше чем 3, а правая не меньше чем 3.
5. $[100; +\infty)$. *Указание.* Поскольку $|a| \ge a$ при любом a, левая часть не меньше чем $200x$, причем равенство возможно лишь тогда, когда все подмодульные выражения неотрицательны.
6. $[3; +\infty)$. *Указание.* Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-a) \ge 0, \\ x(x-3)(x-a) \le 0. \end{cases}$$

При $a \ge 3$ у системы единственное решение $x = a$. При $a < 3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[b; 3]$, где $b = \max(a, 2)$.
7. 4004001. Подставляя $x = 0, 1, 2, \ldots, 2001$ в равенство

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1$$

и учитывая начальное значение $f(0) = 0$, имеем равенства

$$f(1) = 1,$$
$$f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 + 1,$$
$$f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 + 1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(2000) = f(1999) + 2 \cdot 1999 + 1,$$
$$f(2001) = f(2000) + 2 \cdot 2000 + 1,$$

сложив которые, получаем

$$f(2001) = 2(1 + 2 + \ldots + 1999 + 2000) + 1 \cdot 2001 = 2001^2.$$

Вариант 8

1. $\{-12\} \cup (7; +\infty)$. **2.** $\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.
3. $\left[\frac{1}{8}; 1\right) \cup (1; 16] \cup (64; +\infty)$.
4. $3/4$. *Указание.* Пусть t_1 и t_2 – целые числа часов, за которые первый и второй самолеты облетают свои окружности. По условию,

$$\begin{cases} 43 \le 4t_1 \le 49, \\ 43 \le 5t_2 \le 49, \\ |4t_1 - 5t_2| \ge 2, \end{cases}$$

откуда $t_1 = 12$, $t_2 = 9$, а поскольку скорости самолетов одинаковы, получаем $\frac{r}{R} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$.
5. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. Медиана BD делит верхнюю сторону EF квадрата пополам (рис.16):

$$\frac{EL}{AD} = \frac{BL}{BD} = \frac{LF}{DC} \Rightarrow EL = FL.$$

Высота LN, опущенное из точки L на сторону AC, проходит через центр O квадрата.
Отрезок DM пересекает отрезок LN в точке O и делит его пополам. Поэтому, как и выше, имеем

$$\frac{BM}{LO} = \frac{MH}{ON} \Rightarrow BM = MH.$$

Таким образом, в треугольнике DMC сторона DC вдвое меньше стороны AC, а опущенная на DC высота MH вдвое меньше высоты

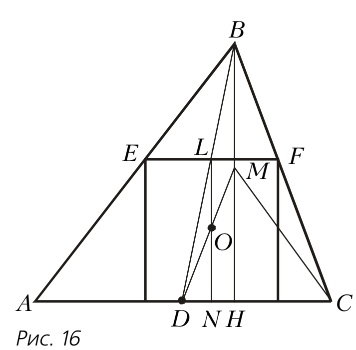

Рис. 16