8. $\frac{mk}{l}$. *Указание.* Пусть $NA\perp OL$, $NB\perp OM$, $NC\perp KM$, $ND\perp LM$; $NA=k$, $NB=m$, $NC=l$, $ND=n$.

Проведем отрезки NK и NM. Тогда $\Delta NKA\sim\Delta NMD$ (в этих прямоугольных треугольниках $\angle NKA=\angle NML$ как вписанные, опирающиеся на дугу NL).

Другая пара подобных прямоугольных треугольников имеет те же гипотенузы NK и NM: $\Delta NKC\sim\Delta NMB$ (угол NMB между хордой и касательной равен вписанному углу NKM, опирающемуся на дугу NM).

Из этих двух подобий следует

$$\frac{k}{n}=\frac{NK}{NM}=\frac{l}{m}\Rightarrow mk=ln.$$

Вариант 6

1. $\pi n-2$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** $(-\infty;2)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2};3\right]$.

3. -1; $2/3$. **4.** $\frac{a}{2}\sqrt{kl}$. **5.** $(-\infty;-2)$. **6.** $\frac{80}{3}$.

7. $\frac{3\pi}{2}$ при $a=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, при других a решений нет. *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\cos 2x-\cos 2(x+a)=\sin a-3.$$

Последнее равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}\cos 2x=-1,\\ \cos 2(x+a)=1,\ \sin a=1.\end{cases}$$

8. Продолжим прямую MN ($MN\|AC$ по условию) до пересечения с окружностями (рис.15), тогда $AEFC$ – прямоугольник ($\angle AEN$ и $\angle MFC$ опираются на диаметры).

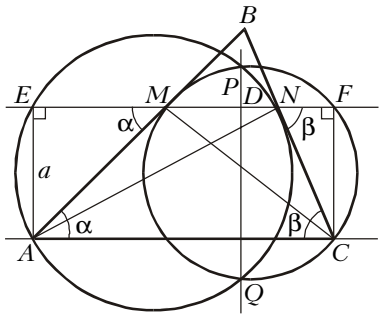

Рис. 15

Пусть $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\beta$, $EA=FC=a$. Тогда $\angle EMA=\alpha$, $\angle FNC=\beta$, EN и PQ – пересекающиеся хорды одной окружности, MF и PQ – другой. Следовательно,

$ED\cdot DN=DP\cdot DQ$, $MD\cdot DF=DP\cdot DQ$, откуда получаем, что $\underline{ED}\cdot DN=MD\cdot\underline{DF}$. Подставив в эту формулу выражения $ED=EM+MD=a\operatorname{ctg}\alpha+MD$, $DF=DN+NF=DN+a\operatorname{ctg}\beta$, находим $\frac{MD}{DN}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta}$. Если $\frac{MD}{DN}=\sqrt{3}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, то $\beta=\frac{\pi}{3}$.

Вариант 7

1. $(0;1)\cup(1;+\infty)$.

2. 1. *Указание.* Пусть $\angle A=\angle C=2\alpha$. Тогда по теореме синусов

$$\frac{AD}{\sin\alpha}=\frac{DC}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

3. πn, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}3x$.

4. 2. *Указание.* Левая часть уравнения не больше чем 3, а правая не меньше чем 3.

5. $[100;+\infty)$. *Указание.* Поскольку $|a|\ge a$ при любом a, левая часть не меньше чем $200x$, причем равенство возможно лишь тогда, когда все подмодульные выражения неотрицательны.

6. $[3;+\infty)$. *Указание.* Преобразуем систему к виду

$$\begin{cases}(x-1)(x-2)(x-a)\ge 0,\\ x(x-3)(x-a)\le 0.\end{cases}$$

При $a\ge 3$ у системы единственное решение $x=a$. При $a<3$ множества решений обоих неравенств содержат отрезок вида $[b;3]$, где $b=\max(a,2)$.

7. 4004001. Подставляя $x=0,1,2,\ldots,2001$ в равенство

$$f(x+1)=f(x)+2x+1$$

и учитывая начальное значение $f(0)=0$, имеем равенства

$$f(1)=1,$$
$$f(2)=f(1)+2\cdot 1+1,$$
$$f(3)=f(2)+2\cdot 2+1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$f(2000)=f(1999)+2\cdot 1999+1,$$
$$f(2001)=f(2000)+2\cdot 2000+1,$$

сложив которые, получаем

$$f(2001)=2(1+2+\ldots+1999+2000)+1\cdot 2001=2001^2.$$

Вариант 8

1. $\{-12\}\cup(7;+\infty)$. **2.** πn, $\pm\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

3. $\left[\frac{1}{8};1\right)\cup(1;16]\cup(64;+\infty)$.

4. $3/4$. *Указание.* Пусть t_1 и t_2 – целые числа часов, за которые первый и второй самолеты облетают свои окружности. По условию,

$$\begin{cases}43\le 4t_1\le 49,\\ 43\le 5t_2\le 49,\\ |4t_1-5t_2|\ge 2,\end{cases}$$

откуда $t_1=12$, $t_2=9$, а поскольку скорости самолетов одинаковы, получаем $\frac{r}{R}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{3}{4}$.

5. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. Медиана BD делит верхнюю сторону EF квадрата пополам (рис.16):

$$\frac{EL}{AD}=\frac{BL}{BD}=\frac{LF}{DC}\Rightarrow EL=FL.$$

Высота LN, опущенное из точки L на сторону AC, проходит через центр O квадрата.

Отрезок DM пересекает отрезок LN в точке O и делит его пополам. Поэтому, как и выше, имеем

$$\frac{BM}{LO}=\frac{MH}{ON}\Rightarrow BM=MH.$$

Таким образом, в треугольнике DMC сторона DC вдвое меньше стороны AC, а опущенная на DC высота MH вдвое меньше высоты

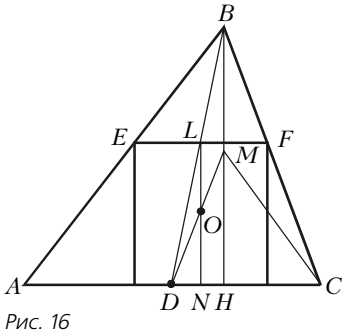

Рис. 16