прямой MN. Поскольку

$$MO = \sqrt{OC^2 - MC^2} = \sqrt{3} < MN,$$

точка O лежит внутри трапеции. Тогда

$NO = MN - MO = \sqrt{2}$, а $AN = ND = \sqrt{OD^2 - ON^2} = \sqrt{3}$.

Следовательно, $AD > BC$, поэтому $\angle BAD = \angle CDA$ – острые углы, а $\angle ABC = \angle DCB$ – тупые углы.

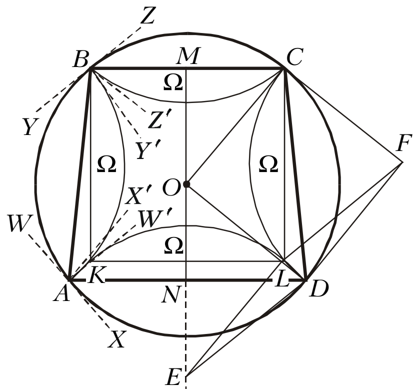

Рис. 14

Дуги AB, BC, CD и AD отражаются внутрь трапеции симметрично относительно прямых AB, BC, CD и AD соответственно. Дуги, отраженные внутрь трапеции, далее будем называть внутренними. Пусть XW и YZ – касательные, проведенные к окружности в точках A и B соответственно, AW', AX', BY' и BZ' – лучи, симметричные лучам AW, AX, BY и BZ относительно прямых AB, AD, AB и BC соответственно. (Таким образом, AW' касается внутренней дуги AB в точке A, AX' касается внутренней дуги AD и т.д.)

Пусть E и F – точки, симметричные точке O относительно прямых AD и CD соответственно.

Заметим, что каждый из углов WAB, XAD – это угол между касательной и хордой, поэтому

$$\angle W'AB + \angle X'AD = \angle WAB + \angle XAD = \angle BCD > \angle BAD.$$

Это означает, что внутренние дуги AB и AD пересекаются внутри трапеции. Пусть K – точка их пересечения. Аналогично доказывается, что внутренние дуги CD и AD тоже пересекаются в некоторой точке L.

В то же время

$$\angle Y'BA + \angle Z'BC = \angle YBA + \angle ZBC = \angle ADC > \angle ABC,$$

откуда следует, что внутренние дуги AB и BC не пересекаются внутри трапеции. Аналогично, не пересекаются внутренние дуги BC и CD.

Так как $OC = OD = FC = FD = ED = EL = FL = \sqrt{5}$, то $OCFD$ и $ELFD$ – ромбы, значит, $OC \| FD \| EL$. Следовательно, $EOCL$ – параллелограмм, $CL = OE = 2ON = 2\sqrt{2}$, $CL \| OE$. Отсюда получается, что $BC = CL$, $BC \perp CL$. Аналогично доказывается, что $BC = BK$, $BC \perp BK$. Значит, $KBCL$ – квадрат. Таким образом, дуги BC, BK, CL и KL равны, так как это дуги равных окружностей, стягиваемые равными хордами. Дуги AB и BC не пересекаются внутри трапеции, следовательно, дуги BC, BK, CL и KL не пересекаются внутри квадрата $KBCL$.

Пусть Ω – площадь каждого из сегментов, отсекаемых равными хордами BC, BK, CL и KL от равных окружностей. Площадь s сегмента круга радиуса r, дуга которого задается центральным углом α, вычисляется по формуле

$$s = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha).$$

В нашем случае $\sin\angle COM = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $\cos\angle COM = \sqrt{\frac{3}{5}}$, значит, $\sin\angle BOC = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Поэтому

$$\Omega = \frac{5}{2}\left(\arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) - \frac{2\sqrt{6}}{5}\right).$$

Тогда окончательно получаем, что искомая площадь S фигуры, состоящей из всех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов, равна

$$S = BC^2 - 4\Omega = 8 - 10\arcsin\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) + 4\sqrt{6}.$$

6. $\left(-13 - \sqrt{57}; 8\right)$. *Указание.* Пусть

$$a = f\left(x^2 - 2x - 112\right),\ b = f\left(-2x\sqrt{32 - 2x}\right),$$

$$c = f\left(-2x\sqrt{32 - 2x} - 112\right).$$

Основание степени в знаменателе равно $3c - 2b = c + 2(c - b)$. Поскольку функция $f(x)$ отрицательна, $c < 0$. Разность $c - b < 0$ в силу возрастания $f(x)$, так как

$$-2x\sqrt{32 - 2x} > -2x\sqrt{32 - 2x} - 112.$$

Поэтому знаменатель $\left(c + 2(c - b)\right)^7$ в исходном неравенстве отрицателен, и следовательно, неравенство равносильно неравенству

$$2a + |a - 3b| < 0,$$

которое равносильно двойному неравенству $2a < a - 3b < -2a$, равносильному системе

$$\begin{cases} a < -3b, \\ a < b. \end{cases}$$

Первое неравенство в системе выполнено вследствие отрицательности $f(x)$. Второе же в силу возрастания функции $f(x)$ равносильно неравенству

$$x^2 - 2x - 112 < -2x\sqrt{32 - 2x},$$

которое приводится к виду

$$\left(x + \sqrt{32 - 2x}\right)^2 < 114,$$

после чего легко решается.

Вариант 5

1. $(2; 3]$. **2.** $\dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 5\pi n}}{5}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$. **3.** $\log_3 2$, $2\log_2 3$.

4. $7\sqrt{3}$. *Указание.* Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

5. $\left(-\sqrt{85/3}; -\sqrt{5/3}\right) \cup \left(\sqrt{5/3}; \sqrt{85/3}\right)$.

6. $\left(13 + 2\sqrt{3}\right)a$.

Указание. Плоскость сечения, параллельная ребру SM двугранного угла, пересекает его грани по параллельным прямым AB и CD. Эти прямые отсекают на сторонах правильных треугольников (граней правильного тетраэдра) равные отрезки: $SA = MB$, $SD = MC \Rightarrow AD = BC$, причем $BC \| KM$.

7. $\left(2a^2 + \dfrac{a}{2}; +\infty\right)$ при $a < 0$;

$\left(\dfrac{a^2}{18} + \dfrac{a}{2}; +\infty\right)$ при $a \geq 0$.

Указание. Выполнив замену $t = \sqrt{2x - a}$, сведите задачу к решению системы

$$\begin{cases} 3t^2 + 5at - 2a^2 > 0, \\ t \geq 0. \end{cases}$$