

$$\left(-\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m; -\arcsin\left(\frac{17}{28}\right) + 2\pi n \right); m, n \in \mathbf{Z} \}.$$

3. 10 км/ч. *Указание.* Рассмотрите два случая: 1) встреча произошла до момента или в момент изменения скорости первым велосипедистом; 2) встреча произошла после изменения скорости первым велосипедистом.

4. $\frac{192}{17}$ или $\frac{1728}{25} = 69,12$. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм (рис.8), O_1, O_2, O_3 и O_4 – центры окружностей, описанных около треугольников AOB, BOC, COD и AOD соответственно.

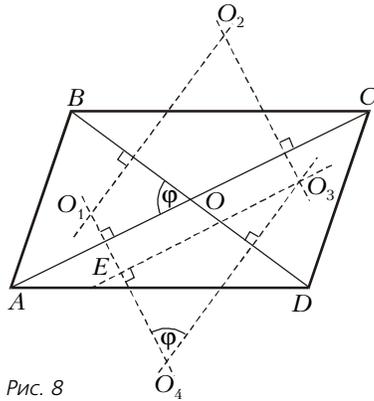


Рис. 8

Пусть $\angle AOB = \varphi$ ($0 < \varphi < \pi$). Так как O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4 и O_1O_4 являются срединными перпендикулярами к отрезкам BO, CO, DO и AO соответственно, то $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм, причем $\angle O_1O_4O_3 = \angle AOB = \varphi$. Пусть E – проекция точки O_3 на прямую O_1O_4 . Поскольку $AO = OC$,

имеем $O_3E = AO$. Тогда $AO = O_3O_4 \cdot \sin \varphi = 16 \sin \varphi$. По следствию из теоремы синусов для треугольника ABO , в котором известен радиус описанной окружности $R = 5$, получаем $AB = 2R \sin \varphi = 10 \sin \varphi$.

В том же треугольнике $BO = \frac{BD}{2} = 6$, следовательно, по теореме косинусов

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos \varphi,$$

т.е.

$$100 \sin^2 \varphi = 256 \sin^2 \varphi + 36 - 192 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Поделив полученное равенство на $12 \sin^2 \varphi$ ($\sin^2 \varphi \neq 0$), приходим к квадратному уравнению

$$3 \operatorname{ctg}^2 \varphi - 16 \operatorname{ctg} \varphi + 16 = 0.$$

Отсюда имеем два решения

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{4}{3} \text{ или } \operatorname{ctg} \varphi = 4.$$

Дальнейшие вычисления очевидны.

5. $\left[-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}; 3\right] \cup \left[-3; -3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$;

$$\left(-4; -3 - \varphi(a)\right] \cup \left[-3 - \frac{1}{\sqrt{3}}; -3\right] \cup$$

$$\cup \left[-3; -3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[-3 + \varphi(a); -2\right] \text{ при } a \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{10}\right];$$

$$\left(-4; -3\right) \cup \left(-3; -2\right) \text{ при } a = \frac{1}{10};$$

$$\left(-4; -3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[-3 - \varphi(a); -3\right] \cup$$

$$\cup \left(-3; -3 + \varphi(a)\right] \cup \left[-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}; -2\right] \text{ при } a \in \left(\frac{1}{10}; \frac{1}{3}\right];$$

$$\left(-4; -3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}; -2\right] \text{ при } a \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Здесь использовано обозначение $\varphi(a) = \left(\frac{1-3a}{a+2}\right)^{\log_3 \sqrt{\frac{a+2}{1-3a}}}$.

Указание. Выполнив замену

$$t = 3^{-2\sqrt{-\log_{81}(x^2+6x+9)}} = 3^{-2\sqrt{-\log_9|x+3|}},$$

после преобразований приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 3(a+2)t^2 + (8a-5)t - (3a-1) \geq 0, \\ 0 < t < 1. \end{cases}$$

6. $729\sqrt{6}$; $\frac{27-3\sqrt{11}}{4\sqrt{2}}$.

Докажем вспомогательное

Утверждение. Пусть в треугольнике GSH вписана окружность с центром в точке O , касающаяся его сторон GS и GH в точках K и M соответственно. Прямая KM пересекает прямую SO в точке P . Тогда $\angle SPH = 90^\circ$.

Доказательство. 1) Если треугольник GSH равнобедренный, $GS = SH$, то точки P и M совпадают. SM является биссектрисой, медианой и высотой треугольника GSH , поэтому угол SPH – прямой.

2) Пусть $SH < GS$. Тогда точки H и M лежат по одну сторону от прямой SO , а P лежит внутри треугольника GSH (рис.9).

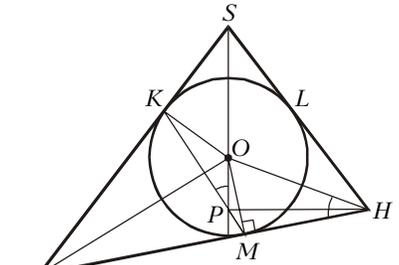


Рис. 9

Пусть $\angle GSH = \alpha$, $\angle SGH = \beta$, $\angle SHG = \gamma$.

Поскольку углы OKG и OMG – прямые, точки O, K, G, M лежат на одной окружности, следовательно, $\angle OKM =$

$$= \angle OGM = \frac{\beta}{2}. \text{ Тогда из треугольника } SKP \text{ имеем}$$

$$\angle SPK = \pi - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}.$$

Поэтому $\angle OPM + \angle OHM = \pi$, следовательно, выпуклый четырехугольник $OPMH$ является вписанным в некоторую окружность. Но тогда $\angle OPH = \angle OMH = 90^\circ$.

3) Пусть теперь $SH > GS$. Тогда точки H и M лежат по разные стороны от прямой SO , а P находится вне треугольника GSH (рис.10).

Дословно повторяя рассуждения п.2), получаем

$$\angle OKM = \angle OGM = \frac{\beta}{2},$$

поэтому $\angle SPK = \frac{\gamma}{2}$. Так

как равные углы OPM и OHM опираются на один и тот же отрезок OM , а их вершины P и

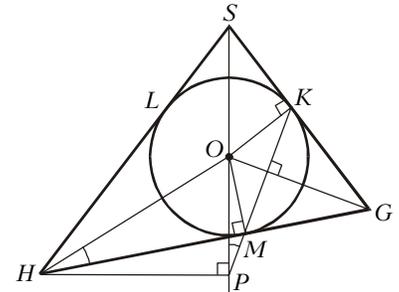


Рис. 10

H находятся по одну сторону от прямой OM , то существует окружность, проходящая через точки O, H, P, M . Следовательно, $\angle OPH = \angle OMH = 90^\circ$. Утверждение доказано.

Сфера, о которой идет речь в условии задачи, в пересечении с плоскостью ASB дает окружность, вписанную в треугольник GSH . Последний отсекается от треугольника ASB плоскостью, касающейся сферы в точке M (рис.11 и 12).