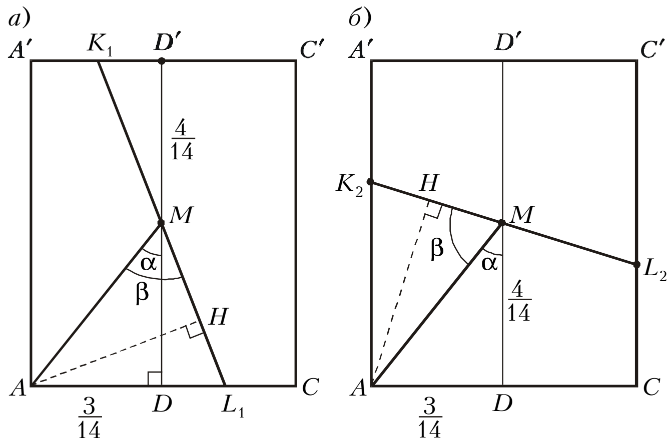

Рис. 5

$$\beta = \angle AMH,\ \sin\beta = \frac{56}{65},\ \cos\beta = \frac{33}{65},$$

$$\cos\angle DML_1 = \cos(\beta-\alpha) = \frac{12}{13},\ \operatorname{tg}(\beta-\alpha) = \frac{5}{12},$$

$$\sin\angle DMK_2 = \sin(\beta+\alpha) = \frac{323}{325}.$$

В первом случае сечение выглядит, как на рисунке 4, и имеет площадь

$$S_1 = (MN + KE)\cdot KM = MN\left(1 + \frac{A'K_1}{A'D'}\right)ML =$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{3}{14}\right)^2}\left(1 + \frac{\frac{3}{14} - \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{14}}{\frac{3}{14}}\right)\cdot\frac{4}{14\cdot\frac{12}{13}} =$$

$$= \frac{169}{14^2\cdot 27}\sqrt{187} = \frac{169}{5292}\sqrt{187}.$$

Во втором случае сечение треугольное и имеет площадь

$$S_2 = K_2M\cdot MN = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{323}{325}}\sqrt{1-\left(\frac{3}{14}\right)^2} = \frac{975}{14^2\cdot 323}\sqrt{187} < S_1.$$

6. $-\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$. *Указание*. Множество решений каждого из неравенств системы

$$\begin{cases}(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \le 0,\\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \ge 0\end{cases}$$

может представлять собой отрезок, объединение двух непересекающихся лучей (с началом), прямую, точку или пустое множество. Поэтому система может иметь единственное решение только в следующих случаях:

А. Решением одного из неравенств является ровно одна точка.

Б. Множества решений обоих неравенств имеют общую граничную точку, т.е. существует решение системы

$$\begin{cases}(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0,\\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0.\end{cases}$$

Вариант 2

1. $(-\infty; -2]\cup[0; \lg 101 - 2)$. *Указание*. Неравенство преобразуется к виду $(\log_2 5 - 1)\log_5 y \le 0$, где $y = 101\cdot 10^x - 10^{2+2x}$.

2. Нет. *Указание*. Приведите уравнение к виду

$$12\sin x = |5\cos x - 4|.$$

Решениям этого уравнения соответствуют точки $A(u; v)$ и $B(u; v)$ пересечения единичной окружности $u^2 + v^2 = 1$ с графиком функции $12v = |5u - 4|$ (рис.6).

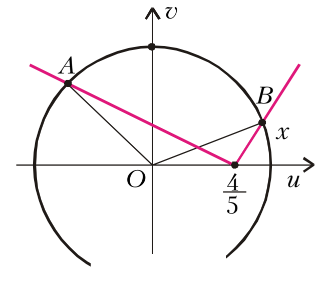

Рис. 6

3. $\frac{34}{9}$. *Указание*. Пусть O – центр параллелограмма, $BD = 2x$, $AC = 2y$. Тогда, так как

$$2\left(AB^2 + BC^2\right) = BD^2 + AC^2,\ BO\cdot BE = AO\cdot OC,$$

получаем систему

$$\begin{cases}x^2 + y^2 = 17\\ x(9-x) = y^2.\end{cases}$$

4. 618, 659, 698.

5. $\left(-\infty; -\frac{8}{7}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}; 0\right)\cup\left(\frac{8}{9}; +\infty\right)$. *Указание*. Область значений функции $f(a) = a\sqrt[4]{4-a^4}$ – отрезок $-\sqrt{2} \le a \le \sqrt{2}$. Поэтому корнями данного уравнения не могут быть те и только те значения x, для которых либо $2x^4 + x^3 < 0$, либо $4\sqrt{2x^4 + x^3} > \sqrt{2}\left|x + 4x^2 - 8\right|$. Осталось решить полученные неравенства.

6. 26; $\left[42; \frac{253 + 84\sqrt{3}}{8}\right]$.

Периметр сечения многогранника плоскостью, отстоящей от основания $A'B'C'D'$ (размером 6×7) на расстояние $x \in [0; h]$, где h – высота исходного параллелепипеда, представляет собой линейную функцию $P(x)$, так как сечение каждой из восьми перечисленных в условии граней есть отрезок, длина которого линейно зависит от x. Поэтому из равенств $P(0) = P(h) = 26$ следует, что функция $P(x)$ есть константа, равная 26.

Аналогично, площадь сечения $S(x)$ – квадратичная функция, удовлетворяющая равенствам $S(0) = S(h) = 42$, поэтому она достигает экстремума в точке $\frac{h}{2}$, т.е. когда плоскость сечения равноудалена от оснований (на рисунке 7 изображен вид «сверху»). Это сечение представляет собой 8-угольник, площадь которого равна

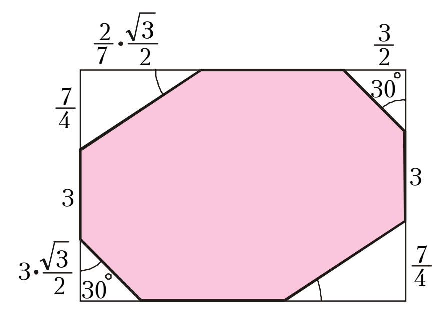

Рис. 7

$$S\left(\frac{h}{2}\right) = \left(\frac{7}{2} + \frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(3 + 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4}\right) -$$

$$- \frac{7}{4}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{253 + 84\sqrt{3}}{8} > 42.$$

Вариант 3

1. 12. **2.** $\left\{\left(\arccos\left(\frac{27}{28}\right) + 2\pi m; \pi + \arcsin\left(\frac{17}{28}\right) + 2\pi n\right);\right.$