## Задачи заочного тура олимпиады

### Физика

**1.** Два тела бросили одновременно из одной точки: одно вертикально вверх, другое под углом $\theta = 60^\circ$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела равна $v_0 = 25$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите расстояние между телами через $\tau = 1{,}7$ с. (10 баллов)

**2.** Под каким углом к горизонту надо бросить тело массой $M$, чтобы максимальная высота его подъема равнялась дальности полета, если на тело действует с постоянной силой $F$ горизонтальный попутный ветер? Ускорение свободного падения равно $g$. (10 баллов)

**3.** На столе лежит доска массой $M$, на одном конце которой находится брусок массой $m$. Бруску сообщают скорость $v_0$ вдоль доски. Какое время вся система будет находиться в движении, если коэффициент трения между доской и бруском $\mu_1$, а между доской и столом $\mu_2$? (10 баллов)

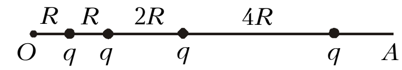
**4.** Температура одного моля идеального одноатомного газа меняется по закону $T = aV^2$. Найдите теплоемкость газа в этом процессе. Универсальная газовая постоянная равна $R$. (10 баллов)

**5.** В цилиндре под поршнем находится воздух при температуре $t_1 = 100$ °С, имеющий относительную влажность $\varphi = 40\%$. Во сколько раз следует изменить объем воздуха, чтобы при его охлаждении до температуры $t_2 = 20$ °С на стенках сосуда выпала роса? Нормальное атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, давление насыщенного водяного пара при температуре 20 °С $p_н = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па. (10 баллов)

**6.** В двухэлектродной лампе напряжение между плоскими электродами составляет 22 кВ. Электроны ударяют об анод с общей силой 1 мкН. Удары неупругие. Какой силы ток течет через лампу? Отношение заряда электрона к его массе равно $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. (10 баллов)

**7.** Пучок протонов влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл перпендикулярно линиям индукции. Протоны движутся по дуге окружности радиусом 20 см и попадают на заземленную мишень. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в мишени, если сила тока в пучке 0,1 мА. Отношение заряда протона к его массе равно $0{,}96 \cdot 10^8$ Кл/кг. (10 баллов)

**8.** На луче $OA$ (см. рисунок) расположено бесконечное множество точечных зарядов величиной $q$ так, что расстояние между очередными двумя соседними зарядами удваивается. Определите потенциал поля в точке $O$ (начало луча), где заряда нет, а до первого заряда расстояние равно $R$. Электрическая постоянная равна $\varepsilon_0$. (10 баллов)




**9.** В области пространства, где имеются одновременно однородное магнитное поле с индукцией $B$ = 0,2 Тл и однородное электрическое поле с напряженностью $E$, движется электрический заряд. Известно, что в тот момент времени, когда скорость заряда равна $v$ = 500 м/с и направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции, ускорение заряда равно нулю. Пренебрегая силой тяжести, определите величину напряженности электрического поля. (10 баллов)

**10.** Непрерывное излучение лазера мощностью 600 Вт продолжалось 20 мс. Излученный свет попал на кусочек идеально отражающей фольги массой 2 мг, расположенный перпендикулярно направлению распространения света. Какую скорость приобрел кусочек фольги? (10 баллов)

### Математика

**1.** Решите неравенство

$$\sqrt{x+5} < \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3}\text{. (20 баллов)}$$

**2.** Проверьте справедливость равенства

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arcctg}\frac{2}{11}\text{. (20 баллов)}$$

**3.** Решите уравнение

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}\text{. (10 баллов)}$$

**4.** Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки *2*, *3*, *4* и *5*. Сумма полученных оценок равна 93, причем оценок *3* больше, чем пятерок, но меньше, чем оценок *4*. Кроме того, число четверок делилось на 10, а число оценок *5* было четным. Определите, сколько каких оценок получила группа. (25 баллов)

**5.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с острым углом 30° проведена высота $CD$ из вершины прямого угла $C$. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$, если меньший катет треугольника $ABC$ равен 1. (25 баллов)

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## Конкурс «Математика 6–8»

*(см. «Квант» №4 за 2001 г.)*

**1.** Преобразовав выражение в правой части исходного тождества к виду

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3bc^2 + 3b^2c - 18abc\text{ А,}$$

запишем разность между правой и левой его частями:

$$3\left(ab^2 + ac^2 + a^2b + a^2c + bc^2 + b^2c - 6abc\right) = 0.$$

Последнее равенство равносильно тождеству

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 = 0.$$

Поскольку числа $a$, $b$, $c$ положительны, то это равенство возможно лишь в одном единственном случае: $a = b = c$.

**2.** Для произвольных точек $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $K$ плоскости справедливы векторные равенства

$$\vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DK} + \vec{KF},\quad \vec{CE} = \vec{BE} - \vec{BC}.$$

Учитывая, что для параллелограммов $ABCD$ и $CEFK$ справедливы равенства

$$\vec{KF} = \vec{CE},\ \vec{AD} = \vec{BC},$$

выводим

$$\vec{AF} = \vec{DK} + \vec{BE}\text{ .А}$$

По условию $\vec{DK} \parallel \vec{BE}$, поэтому $\vec{AF} \parallel \vec{DK}$, $\vec{AF} \parallel \vec{BE}$. Векторы $\vec{DK}$ и $\vec{BE}$ могут быть сонаправлены (рис.1) или противоположно направлены (рис.2). В первом случае $|\vec{AF}| = |\vec{BE}| + |\vec{DK}| = a + b$; во втором случае $|\vec{AF}| = a - b$ или $|\vec{AF}| = b - a$ в зависимости от того, какой из векторов $\vec{BE}$ или $\vec{DK}$ длиннее.