

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} + \frac{5}{2x+y-xy} = 5, \\ 2x+y + \frac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$$

6. Пункты A и B расположены на двух различных дорогах, представляющих собой две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в пункте C . Два мотоциклиста одновременно начинают движение: первый из пункта A по направлению к C , а второй из B по направлению к C . Через какое время после начала движения расстояние между мотоциклистами будет наименьшим и каким, если скорость первого мотоциклиста равна 44 км/ч, второго – 33 км/ч, а расстояния от пункта A до пункта C и от пункта B до пункта C равны 275 км?

7. Сфера с диаметром $AD = \sqrt{3}$ касается плоскости треугольника ABC в точке A . Отрезки BD и CD пересекают сферу в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN , если $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{5}$, а $\angle BDC = \frac{\pi}{3}$.

8. При каких значениях параметра $a \geq 1$ уравнение

$$\sin\left(\frac{4}{13}x\right) \operatorname{tg} x = 0$$

имеет ровно шесть различных корней на отрезке $[2a\pi; (a^2 + 1)\pi]$? Укажите эти корни.

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{31}-\sqrt{21}}(x^2 - 9) \geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$|\cos x| - \sqrt{3} \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 1.$$

3. Числа a , b , c в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию, а числа $a - c$, $c - b$, $2a$ в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Какое минимальное значение может принимать число $2a^2 - 4b^2 - c^2 + 4bc + 6a$?

4. Стороны ромба $EFGH$ являются гипотенузами равнобедренных прямоугольных треугольников EAF , FDG , GCH , HBE , причем все эти треугольники имеют общие внутренние точки с ромбом $EFGH$. Сумма площадей четырехугольника $ABCD$ и ромба $EFGH$ равна 12. Найдите GH .

5. Решите уравнение:

$$4 \arcsin(2^x - 7) - \arccos(5^x - 124) = \frac{6\pi}{x}.$$

6. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq k^2 + 10k + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2kx + 4ky \leq 5 - k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Вариант 12

(филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$3 \cos 2x + 4 \sin x = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_{1/12}(2x^2 - 1)} > \frac{1}{\log_{1/4} x} + \frac{1}{\log_{1/3} x}.$$

3. В трапеции $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $CD = 2AB$. На сторонах AD и BC выбраны точки P и Q соответственно так, что $DP : PA = 2$, $BQ : QC = 3 : 4$. Найдите отношение площадей четырехугольников $ABQP$ и $CDPQ$.

4. Писатель-западник (З) и писатель-славянофил (С) опубликовали по одной книге. З употребляет букву «ф» в среднем на страницу текста на 75% чаще, чем С. Тираж книги писателя С на 5% больше, чем тираж книги писателя З. Количество страниц в книге у З на 10% меньше, чем количество страниц в книге у С. На сколько процентов в опубликованных текстах З букв «ф» больше или меньше, чем в текстах С?

5. При каких значениях параметра a на плоскости Oxy существует круг, содержащий все точки, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} 2y - x \leq 1, \\ y + 2x \leq 2, \\ y + ax \leq -1? \end{cases}$$

Вариант 13

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Решите неравенство

$$|x^2 - 8x + 15| \leq |15 - x^2|.$$

2. Брокерская фирма приобрела два пакета акций, а затем продала их за общую сумму 7 миллионов 680 тысяч рублей, получив при этом 28% прибыли. За какую сумму фирма приобрела каждый из пакетов акций, если при продаже первого пакета прибыль составила 40%, а при продаже второго – 20%?

3. На координатной плоскости заданы точки $A(0; 2)$, $B(1; 7)$, $C(10; 7)$ и $D(7; 1)$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$, где E – точка пересечения прямых AC и BD .

4. Решите неравенство

$$\log_2(2^x - 3) \log_{\sqrt{2}}(4^{x+2} - 12 \cdot 2^{x+3} + 144) < 32.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3} \cos\left(\pi\sqrt{x} \sqrt{\frac{6}{x} - x - 4}\right) + 3 \sin\left(\pi x \sqrt{\frac{6}{x^2} - \frac{4}{x} - 1}\right) = \sqrt{12}.$$

6. Центры двенадцати шаров равных радиусов совпадают с серединами ребер правильной шестиугольной пирамиды. Найдите величину двугранного угла при ребре основания пирамиды, если известно, что шар, вписанный в пирамиду, касается всех двенадцати данных шаров.

7. Найдите наибольшие целочисленные значения u и v , для которых уравнение

$$364a^2u - 55v = -20020a^4$$

выполняется ровно при четырех различных значениях a , два из которых относятся как 3 : 5.

Вариант 14

(экономический факультет, отделение менеджмента)

1. Решите уравнение

$$\cos x + \cos 3x = \sqrt{3} \cos 2x.$$