диаметрах построены окружности. Их общая хорда пересекает отрезок MN в точке D, $MD : DN = \sqrt{3}:1$. Найдите $\angle BCA$.

Вариант 7

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{|x-1|} > \frac{1}{|x+1|}.$$

2. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найдите длину AD, если $CE = 2$.

3. Решите тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 4x.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 3 + \sqrt{2x - x^2}.$$

5. Решите уравнение

$$|x-1| + |x+1| + |x-2| + |x+2| + \ldots$$
$$\ldots + |x-100| + |x+100| = 200x.$$

6. Найдите такие значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \ge 0, \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \le 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет уравнению

$$f(x+1) = f(x) + 2x + 1.$$

Найдите $f(2001)$, если $f(0) = 0$.

Вариант 8

*(биологический факультет
и факультет фундаментальной медицины)*

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 + 5x - 84}}{x - 7} \ge 0.$$

2. Решите уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = \frac{1}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_2 x - 3}{6\log_x 2 - 1} \le 2.$$

4. Из аэропорта одновременно вылетают два самолета и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый – по окружности радиуса R, а второй – по окружности радиуса r. Предполагается, что самолеты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями, и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее чем через 43 часа и не позднее чем через 49 часов после вылета произошли следующие два события: первый самолет облетел свою окружность 4 раза, а второй облетел свою окружность 5 раз, и разрыв во времени между этими событиями составил не менее 2 часов. Найдите отношение $\frac{r}{R}$.

5. В треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $BC = 5$, $AC = 7$ вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке M. Найдите площадь треугольника DMC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \cos\left(\sqrt{6 - 2a^2}\, x\right), \\ \cos x = \left(a - \frac{2}{3}\right)\sin\left(\sqrt{6 - 2a^2}\, x\right) \end{cases}$$

имеет ровно одно решение на отрезке $[0; 2\pi]$.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$2 + \cos 2x = 4\cos^2 x.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{5 - x^2} = 1 - x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-2} x \le \log_{x-2} 4.$$

4. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны между собой, $AC = 2$, а $\angle ACB = 30°$. Из вершины A к боковой стороне BC проведены биссектриса AE и медиана AD. Найдите площадь треугольника ADE.

5. Решите неравенство

$$2\log_\pi(\sin x)\log_\pi(\sin 2x) - \log_\pi^2(\sin 2x) \le \log_\pi^2(\sin x).$$

6. Дано задание: на прямоугольном участке земли размером 1×4 м посадить три дерева, одно из которых должно быть в углу участка. Расстояние между любыми двумя деревьями не должно быть меньше 2,5 м. Можно ли выполнить это задание? Ответ обоснуйте.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\frac{1}{x-1} - 1}{1 - \frac{1}{x-7}} \ge 0.$$

2. Найдите неотрицательные решения уравнения

$$1 + \sin 7x = \left(\cos\frac{3x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right)^2.$$

3. Решите уравнение

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{x-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \frac{125}{343}.$$

4. Прямая, проходящая через вершину основания равнобедренного треугольника, делит его площадь пополам, а периметр треугольника делит на части длиной 5 и 7. Найдите площадь треугольника и укажите, где лежит центр описанной окружности: внутри или вне треугольника.