центрами окружностей, описанных около треугольников $AOD$ и $COD$, равно 16. Радиус окружности, описанной около треугольника $AOB$, равен 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

**5.** Для каждого значения параметра $a$ решите неравенство

$$3a-1-(8a-5)3^{-2\sqrt{-\log_{81}\left(x^2+6x+9\right)}} \le 3(a+2)|x+3|^{2\sqrt{\log_{|x+3|}1/9}}.$$

**6.** Сфера касается всех боковых ребер правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, причем ребер $SA$ и $SB$ она касается в точках $K$ и $L$ соответственно. Точки $K$, $L$ и $S$ лежат по одну сторону от плоскости, которая касается сферы в точке $M$, принадлежащей грани $SAB$, и пересекает ребра $SA$ и $SB$ в точках $G$ и $H$ соответственно. Прямые $KM$ и $LM$ делят апофему грани $SAB$ на три равных отрезка. Известно, что $AB = 9$ и $GH = 3\sqrt{11}$. Найдите объем пирамиды $SABCDEF$ и радиус сферы.

### Вариант 4

*(факультет вычислительной математики и кибернетики, июль)*

**1.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cdot 5^{1-y} = \log_3\left(x^{-2}\right), \\ 5^y + \log_3 x = 4. \end{cases}$$

**2.** Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии – натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найдите двадцатый член этой прогрессии.

**3.** Среди всех решений системы

$$\begin{cases} y + 3x \le -3, \\ x^2 + y^2 + 4x + 2y \le 11 \end{cases}$$

найдите такое, при котором выражение $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$ принимает минимальное значение.

**4.** Решите уравнение

$$\cos\left(\pi\left(x + 7\sqrt{x}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(4x + \sqrt{x}\right)\right) = 1.$$

**5.** Трапеция с основанием $\sqrt{8}$ и высотой $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ вписана в окружность радиуса $\sqrt{5}$. Каждый из четырех отсекаемых сторонами трапеции сегментов отражен внутрь трапеции симметрично относительно отсекающей его стороны. Найдите площадь фигуры, состоящей из тех точек трапеции, которые не принадлежат ни одному из отраженных внутрь нее сегментов.

**6.** Функция $f(x)$ определена, возрастает и отрицательна на всей числовой прямой. Решите неравенство

$$\left(2f\left(x^2-2x-112\right) + \left|f\left(x^2-2x-112\right) - 3f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right|\right):$$

$$:\left(3f\left(-2x\sqrt{32-2x}-112\right) - 2f\left(-2x\sqrt{32-2x}\right)\right)^7 > 0.$$

### Вариант 5

*(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2001», март)*

**1.** Решите неравенство

$$\frac{2^x + 5x - 18}{x-2} \le 5.$$

**2.** Решите уравнение

$$2\sin 2x\cos\left(5x^2\right) - \sin\left(5x^2 + 2x\right) = 0.$$

**3.** Решите уравнение

$$18^x - 9^{x+1} - 2^{x+2} + 36 = 0.$$

**4.** В треугольнике $ABC$ приведены медианы $AN$ и $CM$, $\angle ABC = 120^\circ$. Окружность, проходящая через точки $A$, $M$ и $N$, проходит также через точку $C$. Радиус этой окружности равен 7. Найдите площадь $\Delta ABC$.

**5.** Решите неравенство

$$\sqrt{2\log_9\left(3x^2-4\right)} > \log_3\sqrt{3x^2-4}.$$

**6.** В правильной треугольной пирамиде $SKLM$, все ребра которой равны $8a$, на ребре $SK$ взята точка $A$ так, что $SA : AK = 1 : 3$. Через точку $A$ проведена плоскость, параллельная ребру $SM$ и высоте $KN$ $\Delta KLM$. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью.

**7.** Для любого значения $a$ решите неравенство

$$3(2x-a) + 5a\sqrt{2x-a} - 2a^2 > 0.$$

**8.** На стороне острого угла $KOM$ взята точка $L$ ($L$ между $O$ и $K$). Окружность проходит через точки $K$ и $L$ и касается луча $OM$ в точке $M$. На дуге $LM$, не содержащей точки $K$, взята точка $N$. Расстояния от точки $N$ до прямых $OM$, $OK$ и $KM$ равны $m$, $k$ и $l$ соответственно. Найдите расстояние от точки $N$ до прямой $LM$.

### Вариант 6

*(физический факультет, июль)*

**1.** Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x+1)\operatorname{ctg}(2x+3) = 1.$$

**2.** Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3-x}} > \frac{1}{x-2}.$$

**3.** Решите уравнение

$$4^{3x^2+x} - 8 = 2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}.$$

**4.** В трапеции $KLMN$ известно, что $LM \parallel KN$, $\angle KLM = \frac{\pi}{2}$, $LM = l$, $KN = k$, $MN = a$. Окружность проходит через точки $M$ и $N$ и касается прямой $KL$ в точке $A$. Найдите площадь $\Delta AMN$.

**5.** Решите неравенство

$$\log_2\left(\log_3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) < \log_{\frac{1}{8}}\left(\log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}\right)\right).$$

**6.** В пирамиде $SABC$ $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины $S$, являются касательными к сфере, вписанной в пирамиду. Радиус этой сферы равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найдите объем пирамиды.

**7.** Для каждого значения $a$ найдите все решения уравнения

$$\cos 2x + 2\sin^2(x+a) + 2 - \sin a = 0,$$

принадлежащие промежутку $\pi \le x \le 2\pi$.

**8.** В треугольнике $ABC$ известен угол $\angle BAC = \frac{\pi}{4}$. Прямая, параллельная стороне $AC$, пересекает стороны $AB$ и $BC$ в точках $M$ и $N$ соответственно. На отрезках $AN$ и $CM$ как на