

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет,
олимпиада «Абитуриент-2001», март)

1. Решите уравнение

$$3x - 2|x - 2| = 3\sqrt{3x + 18} - 2|\sqrt{3x + 18} - 2|.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_{(21+4x-x^2)}(7-x)}{\log_{(x+3)}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

3. В трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD = 30$ диагонали пересекаются в точке E , а углы AED и BCD равны. Окружность радиуса 17, проходящая через точки C , D и E , пересекает основание AD в точке F и касается прямой BF . Найдите высоту трапеции и ее основания.

4. Можно ли подобрать числа A , B , φ , ψ так, чтобы выражение

$$\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right)^2 + A \cos(x + \varphi) + B \sin(2x + \psi)$$

принимало при всех x одно и то же значение C ? Если да, то какие значения может принимать константа C ?

5. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ с высотой $\frac{4}{7}$ служит треугольник ABC , в котором $AB = BC = 1$ и $AC = \frac{3}{7}$. Через точку пересечения диагоналей грани $ACC'A'$ на расстоянии $\frac{4}{13}$ от точки A проводится плоскость, делящая объем призмы пополам. Какова наибольшая площадь сечения призмы такой плоскостью?

6. Найдите все значения a , при которых система

$$\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 2

(механико-математический факультет, июль)

1. Решите неравенство

$$x \geq \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x}).$$

2. Имеет ли уравнение

$$12 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = |4 - 5 \cos x|$$

хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

3. Через вершины A , B , C параллелограмма $ABCD$ со сторонами $AB = 3$ и $BC = 5$ проведена окружность, пересекающая прямую BD в точке E , причем $BE = 9$. Найдите диагональ BD .

4. Найдите все трехзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.

5. Найдите все числа, которые не могут быть корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt{4 - a^4}(x + 4x^2 - 8)$$

ни при каком значении параметра a .

6. Основание $ABCD$ прямоугольного параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ повернули в плоскости ABC на угол 30° вокруг точки пересечения диагоналей AC и BD (вершина A повернулась в направлении вершины D), а боковые грани заменили гранями $AA'B$, $A'B'B$, $BB'C$, $B'C'C$, $CC'D$, $C'D'D$, $DD'A$ и $D'A'A$. Найдите все значения, которые могут принимать периметр и площадь сечения полученного многогранника плоскостью, параллельной плоскости ABC , если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 26, а его площадь равна 42.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики,
олимпиада «Абитуриент-2001», апрель)

1. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна 27, а сумма первых пяти членов равна 80. Сумма какого числа первых членов прогрессии равна 486?

2. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 3 \sin x + \cos y = 0, \\ 6 \cos x - 2 \sin y = 7. \end{cases}$$

3. Из пункта A в пункт B выехал первый велосипедист. Одновременно с ним с такой же скоростью из B в A выехал второй велосипедист. Через некоторое время первый велосипедист увеличил скорость на 10 км/ч. Если бы первый велосипедист сразу двигался с увеличенной скоростью, то его встреча со вторым велосипедистом состоялась бы на три часа раньше. Известно, что расстояние между A и B равно 180 км, в момент изменения скорости первым велосипедистом расстояние между ними и вторым велосипедистом было меньше 70 км, на весь путь из A в B первый велосипедист затратил 15 ч. Найдите первоначальную скорость велосипедистов.

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O , длина диагонали BD равна 12. Расстояние между