$\vec{F}_c = -k\vec{v}$ *($k > 0$). Ускорение свободного падения* $g = 9{,}8$ *м/с²*.

Ускорение мяча в любой момент времени определяется силой тяжести и силой сопротивления:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v},$$

где m – масса мяча. Найдем приращение скорости мяча за любой элементарный промежуток времени Δt:

$$\Delta\vec{v} = \left(\vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}\right)\Delta t$$

и за время полета t:

$$\vec{v}(t) - \vec{v}_0 = \sum\left(\vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}\right)\Delta t = \vec{g}\,t - \frac{k}{m}\sum\vec{v}\,\Delta t = \vec{g}\,t - \frac{k}{m}\vec{s}(t).$$

По условию, перемещение мяча $\vec{s}(t) = \sum\vec{v}\,\Delta t$ за время полета – это горизонтальный вектор. Переходя в полученном соотношении к проекциям векторов на вертикальную ось, получаем

$$t = \frac{2{,}2v\sin\beta}{g} = 1{,}1 \text{ с}.$$

В заключение отметим, что кинематические соображения позволяют решать не только задачи физики. Например, при решении геометрических задач бывает полезно представить себе, что́ будет происходить с элементами рассматриваемой фигуры, если некоторые ее точки начнут двигаться.

Задача 8. *Некто узнал, что в местности, где зарыт клад, растут три дерева: дуб, сосна и береза. Для того чтобы найти клад, следует стать под березой (точка Б на рисунке 9) лицом к прямой, проходящей через дуб (точка Д) и сосну (точка С), при этом дуб должен оказаться справа, а сосна слева. Затем следует пойти к дубу, считая шаги. Дойдя до дуба, повернуть под прямым углом направо и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до дуба. В этом месте остановиться и поставить вешку (точка B_1). Затем следует вернуться к березе и пойти к сосне, считая шаги. Дойдя до сосны, повернуть под прямы углом налево, и пройти столько же шагов, сколько было пройдено от березы до сосны. В этом месте остановиться и поставить вешку (точка B_2). Клад зарыт точно посередине между вешками (точка K).*

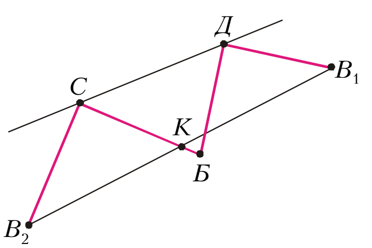

Рис. 9

При такой подробной инструкции отыскание клада не могло вызвать затруднений. Однако они все-таки возникли. Дело в том, что когда кладоискатель попал в указанную местность, он обнаружил там только дуб и сосну. Березы же не было и в помине. И все же он нашел клад. Как ему это удалось сделать?

Представим себе, что точка $Б$ начала двигаться, и пусть $\vec{v}$ – вектор ее мгновенной скорости. Так как длины отрезков $ДВ_1$ и $ДБ$ равны и отрезок $ДВ_1$ получается из отрезка $ДБ$ поворотом на угол $\pi/2$, то точка B_1 будет двигаться согласованно с точкой $Б$, а именно так, что вектор $\vec{v}_1$ ее скорости будет получаться из вектора $\vec{v}$ поворотом на угол $\pi/2$. Аналогично, вектор $\vec{v}_2$ скорости точки B_2 будет получаться из $\vec{v}$ поворотом на угол $-\pi/2$. Поэтому $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Следовательно, при произвольном движении точки $Б$ скорость точки K

$$\vec{v}_K = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$$

всегда равна нулю: точка K неподвижна, и ее положение не зависит от положения точки $Б$! Чтобы найти теперь положение точки K, достаточно выбрать одно любое положение точки $Б$. Например, совместить точку $Б$ с точкой C и применить построение, известное кладоискателю .

Упражнения

1. Самолет, летящий горизонтально на постоянной высоте с постоянной скоростью v, большей скорости звука c, в некоторый момент времени пролетает над наблюдателем. Какой угол α с вертикалью составляет направление на самолет, определяемое по звуку в тот момент, когда истинное (видимое) направление от наблюдателя на самолет составляет с вертикалью угол φ?

2. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиусом $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с. Под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень? Скорость пули $v = 300$ м/с.

3. По пересекающимся под углом α прямым дорогам едут с постоянными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ две машины. Когда первая машина проезжает перекресток, вторая находится на расстоянии L от перекрестка и приближается к нему. Определите наименьшее расстояние $L_{\min}$ между машинами при дальнейшем движении. Через какое время τ расстояние между машинами будет наименьшим?

4. Гимнаст в цирке прыгает с подкидного трамплина и через $t = 1{,}2$ с приземляется на расстоянии $L = 6$ м от трамплина. Точка приземления и трамплин расположены на одной горизонтальной прямой. Определите величину v_0 начальной скорости и угол α наклона вектора $\vec{v}_0$ к горизонтальной плоскости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

5. Найдите максимальную высоту ограды $H_{\max}$, через которую вы могли бы перекинуть снежок, находясь на расстоянии $l = 20$ м от нее. В расчетах используйте свои рекордные возможности по метанию снежков на дальность. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с². Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

6. Два жонглера, стоящие на горизонтальной площадке на расстоянии L друг от друга, перекидываются мячами, бросая их одновременно. С какой по величине скоростью v_{02} и под каким углом β к горизонту был брошен второй мяч, если он попал в первый, когда тот достиг максимальной высоты? Первый жонглер бросил мяч с начальной скоростью v_{01} под углом α к горизонту. Ускорение свободного падения равно g. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

7. За время полета мяча, брошенного мальчиком под углом к горизонту, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 12%, и он упал на землю на расстоянии $s_1 = 14$ м. Когда мяч был брошен под тем же углом к горизонту со скоростью на 20% больше, чем в первом случае, горизонтальная составляющая скорости мяча уменьшилась на 15%. На каком расстоянии s_2 от мальчика упал мяч в этом случае? Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча: $\vec{F}_c = -k\vec{v}$ ($k > 0$). Опыты проводятся на горизонтальной поверхности.