



Рис. 7

**Задача 5.** На крышу дома высотой  $H$  с расстояния  $L$  от него мальчик хочет забросить мяч. При какой минимальной скорости  $v_{0\min}$  это возможно? Под каким углом  $\alpha_*$  следует в этом случае бросить мяч? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Через точки старта и окончания полета (рис.7) проведем прямую  $OA$ , которая образует угол  $\beta$  с горизонтальной прямой. Перемещение мяча за время полета  $t$  равно

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}$$

(считаем  $\vec{r}_0 = \vec{0}$ ). Как видим, проекции векторов  $\vec{v}_0 t$  и  $\vec{g} t^2/2$  на направление нормали к прямой  $OA$  равны:

$$v_0 t \sin(\alpha - \beta) = \frac{g t^2}{2} \cos \beta,$$

откуда находим продолжительность полета мяча:

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos \beta}.$$

Далее, из рисунка 7 следует, что алгебраическая сумма проекций векторов  $\vec{v}_0 t$  и  $\vec{g} t^2/2$  на прямую  $OA$  равна расстоянию от точки старта до точки окончания полета:

$$\sqrt{H^2 + L^2} = v_0 t \cos(\alpha - \beta) - \frac{g t^2}{2} \sin \beta.$$

С учетом выражения для времени полета последнее соотношение перепишем в виде

$$\sqrt{H^2 + L^2} = \frac{v_0^2}{g \cos^2 \beta} (\sin(2\alpha - \beta) - \sin \beta).$$

Наименьшему значению начальной скорости соответствует угол бросания  $\alpha_*$  такой, при котором множитель в скобках в последнем соотношении принимает наибольшее значение:

$$\sin(2\alpha_* - \beta) = 1, \quad 2\alpha_* - \beta = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_* = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

Тогда

$$v_{0\min}^2 = g \sqrt{H^2 + L^2} \frac{\cos^2 \beta}{1 - \sin \beta}.$$

С учетом равенства  $\text{tg} \beta = H/L$  получаем

$$v_{0\min}^2 = g \left( \sqrt{H^2 + L^2} + H \right),$$

и окончательно

$$v_{0\min} = \sqrt{g \left( \sqrt{H^2 + L^2} + H \right)}.$$

**Задача 6.** Из точек  $A$  и  $B$ , находящиеся на одной горизонтальной прямой, одновременно бросили два камня с одинаковыми по модулю скоростями  $v_0 = 20$  м/с. Один из

камней полетел по навесной траектории, другой – по настильной, но каждый попал в точку старта другого камня. Известно, что в точке  $A$  угол бросания  $\alpha = 75^\circ$ . Через какое время  $\tau$  после старта расстояние между камнями станет минимальным? Чему равно это расстояние?

Рассмотрим полет камня, брошенного из точки  $A$ . Повторяя построения, выполненные в начале решения предыдущей задачи (с учетом того, что точки начала и окончания полета лежат на одной горизонтальной прямой), находим продолжительность полета:

$$t = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$$

и расстояние между точками  $A$  и  $B$ :

$$L = v_0 t \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Аналогично, для камня, брошенного из точки  $B$ :

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\beta.$$

Сравнивая выражения для  $L$ , получаем

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta,$$

или, поскольку по условию  $2\alpha + 2\beta = \pi$ ,

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Далее, выберем в качестве тела отсчета камень, вылетевший из точки  $A$ , и свяжем с ним систему отсчета, движущуюся поступательно относительно лаборатории. Скорость второго камня в этой системе  $\vec{u}$  найдем из правила сложения скоростей:

$$\vec{u} = \vec{v}_2(t) - \vec{v}_1(t) = \left( \vec{v}_{02} + \vec{g} t \right) - \left( \vec{v}_{01} + \vec{g} t \right) = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01},$$

т.е. в подвижной системе второй камень движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\vec{u} = \vec{v}_{02} - \vec{v}_{01},$$

равной начальной относительной скорости. Так как  $\vec{v}_{02} \perp \vec{v}_{01}$  и  $v_{01} = v_{02} = v_0$ , вектор  $\vec{u}$  есть диагональ

Рис. 8

квадрата, построенного на векторах  $\vec{v}_{02}$  и  $-\vec{v}_{01}$ , поэтому  $u = \sqrt{2}v_0$ .

Обратимся к рисунку 8, иллюстрирующему относительное движение. Из рисунка находим кратчайшее расстояние между камнями – длину катета  $AC$  в прямоугольном треугольнике  $ACB$ , где угол при вершине  $B$  равен  $\delta = \alpha - 45^\circ = 30^\circ$ :

$$AC = L \sin \delta = \frac{L}{2} = 10 \text{ м}.$$

Максимальное сближение камней произойдет в момент времени

$$\tau = \frac{AC}{u \text{tg} \delta} \approx 0,6 \text{ с}.$$

**Задача 7.** С горизонтальной поверхности земли бросили мяч, и он упал на землю со скоростью  $v = 9,8$  м/с под углом  $\beta = 30^\circ$  к горизонту. Величина вертикальной составляющей скорости в точке бросания на 20% больше, чем в точке падения. Найдите продолжительность  $t$  полета. Считайте силу сопротивления пропорциональной скорости мяча: