

3. Теперь мы уже готовы к рассмотрению двух числовых последовательностей, как в решении задачи а). Итак, рассмотрим две строго возрастающие последовательности чисел в промежутке от 1 до 2000:

- (1) $a_{20} < a_{21} < \dots < a_{1911}$,
- (2) $a_{1793} - S < a_{1794} - S < \dots < a_{1911} - S$, где $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{19}$.

В обеих последовательностях содержится $1892 + 119 = 2011$ чисел. Эти числа не могут быть все различными, так как в промежутке от 1 до 2000 всего имеется 2000 различных чисел. Следовательно, существует пара равных чисел, по одному из каждой последовательности: $a_k = a_p - S$. Таким образом, среди чисел на доске имеется 21 число $a_1, a_2, \dots, a_{19}, a_k$ и a_p такие, что $a_1 + a_2 + \dots + a_{19} + a_k = a_p$.

С другой стороны, если первоначально вычеркнуть 90 наименьших чисел, то сумма двадцати наименьших оставшихся чисел $91 + 92 + \dots + 110 = 2010$ уже превышает наибольшее число на доске.

Ф.Шлейфер

M1785. Остров разделен на княжества.

- а) Каждое княжество представлено на карте острова равносторонним треугольником. Докажите, что для правильной раскраски карты достаточно двух красок.
- б*) Каждое княжество представлено на карте равнобедренным прямоугольным треугольником. Докажите, что для правильной раскраски карты достаточно четырех красок.

(Раскраска является правильной, если всякие два княжества, имеющие общий участок границы, окрашены в разные цвета.)

а) Остров – это многоугольник, который разрезан на равносторонние треугольники. Можно считать, что у каждого из них есть горизонтальная сторона. При этом сам треугольник может находиться выше своей горизонтальной стороны (тогда это треугольник первого типа) или ниже своей горизонтальной стороны (тогда это треугольник второго типа). Важно, что два треугольника

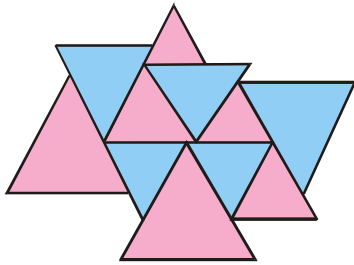


Рис.1

одного типа не могут иметь общего участка границы. Поэтому можно закрасить треугольники первого типа красным цветом, а треугольники второго типа – синим цветом и таким образом получить правильную раскраску карты (рис.1).

б) Остров – это многоугольник, составленный из равнобедренных прямоугольных треугольников.

На плоскости расположения многоугольника проведем прямую S , параллельную какой-либо стороне многоугольника. Нарисуем два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ с центрами Q и H так, что сторона одного и диагональ другого параллельны S (рис.2). Диагонали разделяют каждый квадрат на четыре равнобедренных прямоугольных треугольника так, что всего их восемь.

Ввиду построения можно утверждать, что каждый треугольник карты гомотетичен одному из полученных восьми

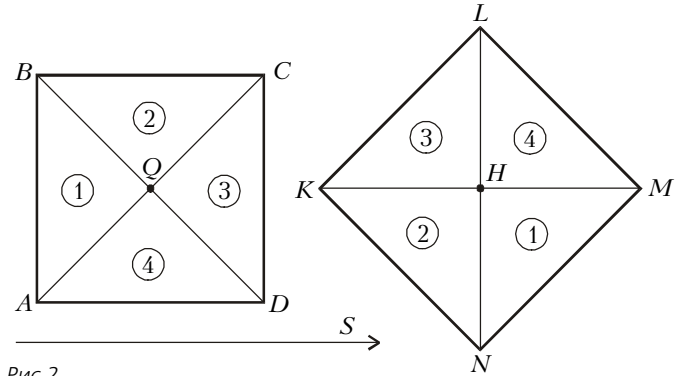


Рис.2

треугольников.

Разделим все равнобедренные прямоугольные треугольники карты на четыре типа. К первому типу отнесем треугольники, гомотетичные треугольнику QAB или треугольнику HMN , ко второму – гомотетичные QBC или HNK , к третьему – гомотетичные QCD или HKL и к четвертому – гомотетичные QDA или HML . Осталось все треугольники одного типа закрасить одной из четырех красок так, чтобы треугольники разных типов были закрасены разными красками. Раскраска будет правильной, ибо два различных треугольника одного типа не имеют общего участка границы.

В.Произволов

Ф1793. Снаряд вылетел из ствола орудия под углом $\alpha = 3^\circ$ со скоростью $v = 10000$ м/с. Оцените, на каком расстоянии L от орудия он упадет на Землю. Сопротивлением воздуха и вращением Земли при расчете пренебречь.

Скорость снаряда $v = 10$ км/с больше первой космической скорости ($v_{1к} \approx 8$ км/с) и лишь немного меньше второй ($v_{2к} \approx 11,2$ км/с). Поэтому снаряд будет двигаться по сильно вытянутому эллипсу, большая полуось которого значительно больше радиуса Земли $R \approx 6400$ км, и ударится о Землю позади орудия. Рассчитать такой эллипс – сложная задача, но в данном случае это делать не обязательно.

Сосредоточим всю массу Земли в ее центре и рассмотрим траекторию снаряда. Из симметрии расположения эллипса относительно Земли следует, что угол падения снаряда на Землю равен углу возвышения орудия $\alpha = 3^\circ$. Ясно, что если бы Земля не мешала, то снаряд пролетел бы по участку траектории, проходящему «внутри Земли» (участок AB на рисунке). Поскольку начальная скорость снаряда велика, а угол возвышения орудия мал, этот участок эллипса внутри Земли близок к прямой линии, а градусная мера Φ дуги, лежащей между точками нахождения орудия и падения

