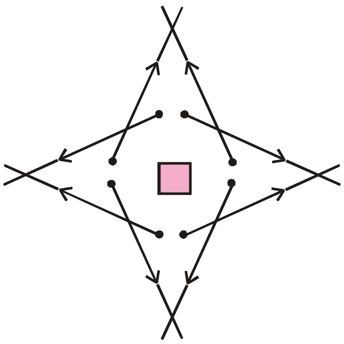
Решения задач М1781–М1785, Ф1793–Ф1802

М1781. *Начальник охраны хочет расставить часовых вокруг лагеря так, чтобы ни к лагерю, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться. Каждый часовой имеет прожектор, который может освещать отрезок длиной 100 м. Сможет ли начальник исполнить свой замысел?*

Ответ: да, сможет. На рисунке показан пример расположения восьми часовых, удовлетворяющий условию. Точками обозначены часовые, каждая из стрелок указывает направление, в котором смотрит часовой вдоль прожектора. В случае более сложной конфигурации лагеря (в нашем примере он изображен квадратиком) принцип расположения часовых и прожекторов такой же.



В.Клепцын

М1782. *Докажите, что для любого натурального n существует лишь конечное число решений неравенства* $\left|x!-y^y\right|<n$ *в натуральных числах x и y.*

Возможны два типа решений нашего неравенства для фиксированного натурального числа n. Первый тип: $x<y$; второй тип: $x \ge y$.

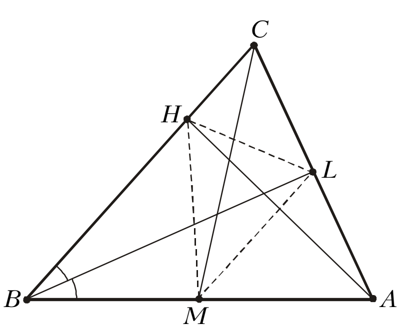
Убедимся, что решений каждого типа будет конечное количество или, как вариант, не будет вообще.

Для решений первого типа, так как $x<y$, можно записать $\left|x!-y^y\right|>\left|y^{y-1}-y^y\right|\ge y$. Но тогда, в силу условия задачи, $y<n$. Пар натуральных чисел x и y таких, что $x<y<n$, имеется лишь конечное число. А значит, число решений первого типа будет не более чем конечно.

Для решений второго типа, так как $x \ge y$, можно заметить, что число $\left|x!-y^y\right|$ делится на y. Тогда либо $\left|x!-y^y\right|=0$, либо $\left|x!-y^y\right|\ge y$. Первый случай возможен лишь при $x=y=1$. Во втором случае $y<n$, но для каждого такого числа y существует лишь конечное количество чисел x таких, что $\left|x!-y^y\right|<n$. Итак, число решений во всех случаях конечно.

С.Злобин

М1783. *В треугольнике ABC проведены высота AH, биссектриса BL и медиана CM. Оказалось, что треугольник HML равносторонний. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.*



Напомним, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине и, наоборот, если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Медиана MH прямоугольного треугольника ABH (см. рисунок) равна половинам гипотенузы BM и MA, а также отрезкам HL и LM, так как стороны треугольника HLM равны. В треугольнике ABL медиана ML равна половине стороны AB, поэтому угол ALB прямой и в треугольнике ABC биссектриса BL является высотой. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$) и BL является также медианой: $AL = LC$. Значит, LH – медиана прямоугольного треугольника AHC, поэтому $AC = 2LH = 2ML = AB$. Итак, $AB = BC = AC$, что и требовалось доказать.

Р.Женодаров

М1784. *На доске записаны все целые числа от 1 до 2000. а) Наугад стирают 998 чисел. Докажите, что среди оставшихся чисел можно указать несколько (не менее двух) так, что их сумма тоже имеется на доске. б*) Наугад стирают 89 чисел. Докажите, что среди оставшихся можно указать 20 чисел так, что их сумма тоже имеется на доске. Останутся ли справедливы утверждения, если стереть еще одно число?*

а) Обозначим оставшиеся на доске числа:

$$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{1001}<a_{1002}.$$

Рассмотрим две строго возрастающие последовательности чисел в промежутке от 1 до 2000:

(1) $a_2<a_3<\ldots<a_{1001}<a_{1002}$,

(2) $a_2-a_1<a_3-a_1<\ldots<a_{1001}-a_1<a_{1002}-a_1$.

В обеих последовательностях содержится 1001 + 1001 = 2002 числа. Эти числа не могут быть все различными, так как в промежутке от 1 до 2000 всего имеется 2000 различных чисел. Следовательно, существует пара равных чисел, по одному из каждой последовательности: $a_k=a_p-a_1$. Таким образом, среди чисел на доске имеются три числа a_1, a_k и a_p такие, что $a_1+a_k=a_p$.

С другой стороны, если первоначально стереть 999 наименьших чисел, то среди оставшихся 1001 чисел сумма двух наименьших 1000 + 1001 = 2001 уже превышает наибольшее число на доске.

б) Обозначим оставшиеся на доске числа:

$$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{1910}<a_{1911}.$$

1. Покажем, что $a_i \le 89+i$ для каждого i = 1, 2, 3, … …, 1911. Действительно,

$$a_{1911}-a_i=\left(a_{1911}-a_{1910}\right)+$$

$$+\left(a_{1910}-a_{1909}\right)+\ldots+\left(a_{i+1}-a_i\right)\ge 1+1+\ldots+1=1911-i.$$

Следовательно,

$$2000 \ge a_{1911} \ge a_i+1911-i \text{ и } 89+i \ge a_i.$$

2. Убедимся, что $S=a_1+a_2+\ldots+a_{19}\le a_{1972}$. На самом деле,

$$a_1+a_2+\ldots+a_{18}\le (89+1)+(89+2)+\ldots+(89+18)=$$

$$=1773 \le \left(a_{1792}-a_{1791}\right)+$$

$$+\left(a_{1791}-a_{1790}\right)+\ldots+\left(a_{20}-a_{19}\right)=a_{1792}-a_{19},$$

т.е. $S=a_1+a_2+\ldots+a_{19}\le a_{1792}$.