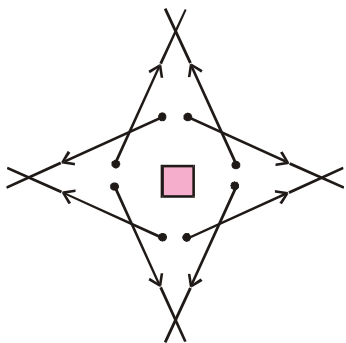


Решения задач М1781–М1785, Ф1793–Ф1802

М1781. Начальник охраны хочет расставить часовых вокруг лагеря так, чтобы ни к лагерю, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться. Каждый часовой имеет прожектор, который может освещать отрезок длиной 100 м. Сможет ли начальник исполнить свой замысел?

Ответ: да, сможет. На рисунке показан пример расположения восьми часовых, удовлетворяющий условию. Точками обозначены часовые, каждая из стрелок указывает направление, в котором смотрит часовой вдоль прожектора. В случае более сложной конфигурации лагеря (в нашем примере он изображен квадратиком) принцип расположения часовых и прожекторов такой же.



В.Клепцын

М1782. Докажите, что для любого натурального n существует лишь конечное число решений неравенства $|x! - y^y| < n$ в натуральных числах x и y .

Возможны два типа решений нашего неравенства для фиксированного натурального числа n . Первый тип: $x < y$; второй тип: $x \geq y$.

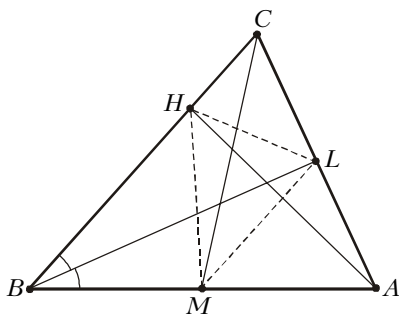
Убедимся, что решений каждого типа будет конечное количество или, как вариант, не будет вообще.

Для решений первого типа, так как $x < y$, можно записать $|x! - y^y| > |y^{y-1} - y^y| \geq y$. Но тогда, в силу условия задачи, $y < n$. Пар натуральных чисел x и y таких, что $x < y < n$, имеется лишь конечное число. А значит, число решений первого типа будет не более чем конечно.

Для решений второго типа, так как $x \geq y$, можно заметить, что число $|x! - y^y|$ делится на y . Тогда либо $|x! - y^y| = 0$, либо $|x! - y^y| \geq y$. Первый случай возможен лишь при $x = y = 1$. Во втором случае $y < n$, но для каждого такого числа y существует лишь конечное количество чисел x таких, что $|x! - y^y| < n$. Итак, число решений во всех случаях конечно.

С.Злобин

М1783. В треугольнике ABC проведены высота AH , биссектриса BL и медиана CM . Оказалось, что треугольник HML равнобедренный. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.



Напомним, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине и, наоборот,

если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Медиана MH прямоугольного треугольника ABH (см. рисунок) равна половинам гипотенузы BM и MA , а также отрезкам HL и LM , так как стороны треугольника HLM равны. В треугольнике ABL медиана ML равна половине стороны AB , поэтому угол ALB прямой и в треугольнике ABC биссектриса BL является высотой. Следовательно, треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$) и BL является также медианой: $AL = LC$. Значит, LH – медиана прямоугольного треугольника AHC , поэтому $AC = 2LH = 2ML = AB$. Итак, $AB = BC = AC$, что и требовалось доказать.

Р.Женодаров

М1784. На доске записаны все целые числа от 1 до 2000. а) Наугад стирают 998 чисел. Докажите, что среди оставшихся чисел можно указать несколько (не менее двух) так, что их сумма тоже имеется на доске. б*) Наугад стирают 89 чисел. Докажите, что среди оставшихся можно указать 20 чисел так, что их сумма тоже имеется на доске. Останутся ли справедливы утверждения, если стереть еще одно число?

а) Обозначим оставшиеся на доске числа:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1001} < a_{1002}.$$

Рассмотрим две строго возрастающие последовательности чисел в промежутке от 1 до 2000:

$$(1) a_2 < a_3 < \dots < a_{1001} < a_{1002},$$

$$(2) a_2 - a_1 < a_3 - a_1 < \dots < a_{1001} - a_1 < a_{1002} - a_1.$$

В обеих последовательностях содержится $1001 + 1001 = 2002$ числа. Эти числа не могут быть все различными, так как в промежутке от 1 до 2000 всего имеется 2000 различных чисел. Следовательно, существует пара равных чисел, по одному из каждой последовательности: $a_k = a_p - a_1$. Таким образом, среди чисел на доске имеются три числа a_1 , a_k и a_p такие, что $a_1 + a_k = a_p$.

С другой стороны, если первоначально стереть 999 наименьших чисел, то среди оставшихся 1001 чисел сумма двух наименьших $1000 + 1001 = 2001$ уже превышает наибольшее число на доске.

б) Обозначим оставшиеся на доске числа:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{1910} < a_{1911}.$$

1. Покажем, что $a_i \leq 89 + i$ для каждого $i = 1, 2, 3, \dots, 1911$. Действительно,

$$a_{1911} - a_i = (a_{1911} - a_{1910}) +$$

$$+ (a_{1910} - a_{1909}) + \dots + (a_{i+1} - a_i) \geq 1 + 1 + \dots + 1 = 1911 - i.$$

Следовательно,

$$2000 \geq a_{1911} \geq a_i + 1911 - i \text{ и } 89 + i \geq a_i.$$

2. Убедимся, что $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{19} \leq a_{1972}$. На самом деле,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{18} \leq (89 + 1) + (89 + 2) + \dots + (89 + 18) =$$

$$= 1773 \leq (a_{1792} - a_{1791}) +$$

$$+ (a_{1791} - a_{1790}) + \dots + (a_{20} - a_{19}) = a_{1792} - a_{19},$$

т.е. $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{19} \leq a_{1792}$.