Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6–2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1801» или «Ф1808». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1804 и М1805 предлагались на XLII Международной математической олимпиаде.

Задачи М1801–М1810, Ф1808–Ф1817

М1801. Натуральное число n равно сумме некоторых трех различных натуральных делителей числа $n-1$. Найдите все такие числа.

С.Токарев

М1802. План секретного объекта представляет собой квадрат размером 8×8, который разбит коридорами на квадратики 1×1. В каждой вершине такого квадратика есть переключатель. Щелчок переключателя меняет освещенность сразу всех коридоров длины 1, выходящих из этой вершины (в освещенных коридорах свет выключается, а в неосвещенных – включается). Первоначально сторож находится в левом нижнем углу полностью неосвещенного объекта. Он может ходить только по освещенным коридорам и щелкать переключателями сколько угодно раз. а) Может ли сторож перебраться в верхний левый угол, погасив при этом свет во всех коридорах? б) Найдите все вершины квадратиков, в которые сторож сможет так перебраться.

А.Шаповалов

М1803. В квадрате $ABCD$ взяты точки P и Q такие, что $\angle PAQ = \angle QCP = 45^\circ$ (рис.1). Докажите, что суммарная площадь треугольников PAQ, PCB и QCD равна суммарной площади треугольников QCP, QAD и PAB.

В.Произволов

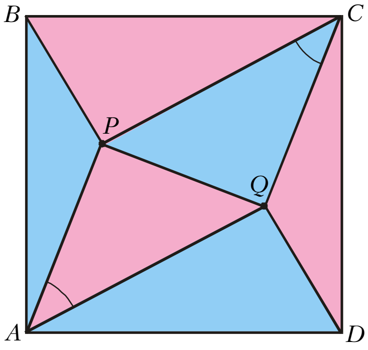

Рис.1

М1804. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

для любых положительных чисел a, b и c.

(Южная Корея)

М1805*. В математической олимпиаде приняли участие двадцать один мальчик и двадцать одна девочка. Известно, что

- каждый из них решил не более шести задач;
- для каждого мальчика и каждой девочки найдется по крайней мере одна задача, которая была решена ими обоими.

Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы три мальчика и три девочки.

(Германия)

М1806. Таблица чисел размером $n \times n$ такова, что любые n чисел, указанные по одному в каждой строке и в каждом столбце, дают всегда одинаковую сумму. В каждой строке таблицы определяется минимальное число, среди этих n чисел выделяется максимальное число M. В каждом столбце таблицы определяется максимальное число, среди них выделяется минимальное число m. Докажите, что $M = m$.

В.Произволов

М1807. При каких n можно разрезать треугольник на n выпуклых многоугольников с различным числом сторон?

А.Заславский

М1808. Решите в натуральных числах следующие уравнения:

а) $x! + y! = z!!$;

б) $(x!)(y!) = z!!$