Значения $x = \pm 1$ соответствуют точкам $(1; 1)$ и $(-1; -1)$ гиперболы. Для нахождения r осталось решить квадратное уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ по стандартной формуле: $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2a}$. Значит, при $|a| < 2$ решений нет, и r – это расстояние от точки A до ближайшей из точек $(1; 1)$ и $(-1; -1)$. А при $|a| \ge 2$ величину r можно найти, подставив значение x в формулу для $\rho(x)$.

Впрочем, вычисления можно упростить. А именно,

$$r = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + a^2 - \frac{2a}{x} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \sqrt{2a^2 - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2}.$$

Разделив обе части уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$ на x, находим

$$x + \frac{1}{x} = a,$$

откуда

$$r = \sqrt{2a^2 - 2a^2 + a^2 - 2} = \sqrt{a^2 - 2}.$$

Есть и другой способ. Запишем уравнение окружности с центром $A(a; a)$ и радиусом r:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = r^2.$$

Подставив $y = 1/x$, раскрыв скобки и выполнив замену $t = x + \dfrac{1}{x}$, получим

$$t^2 - 2at + 2a^2 - 2 = r^2.$$

Мы должны выяснить, при каких $a > 1$ величину r можно выбрать так, чтобы было выполнено неравенство $r < (a - 1)\sqrt{2}$ и квадратное уравнение $t^2 - 2at + 2a^2 - 2 = 0$ имело на луче $(2; +\infty)$ единственный корень t.

Это – типичная «задача с параметром». Не будем расписывать подробно ее решение, отметим только главное: должен равняться нулю дискриминант, т.е.

$$4a^2 - 4\left(2a^2 - 2 - r^2\right) = 0,$$

откуда $r = \sqrt{a^2 - 2}$. При этом значении r имеем $t = a$. А поскольку $t = x + \dfrac{1}{x} \ge 2$, то должно быть выполнено неравенство $a \ge 2$. Итак, расстояние r от точки $A(a; a)$ до гиперболы равно $|a - 1|\sqrt{2}$ при $0 < a \le 2$ и равно $\sqrt{a^2 - 2}$ при $a \ge 2$. (График функции $r(a)$ изображен на рисунке 10.)

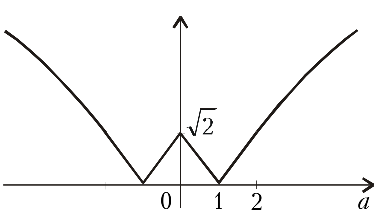

Рис.10

Упражнения

1. Пусть a и k – положительные числа. Найдите расстояние от точки а) $(a; a)$; б) $(a; -a)$ до гиперболы, заданной уравнением $xy = k$.

2. Найдите $\min\limits_{x^2 - y^2 = h^2}\left((a - x)^2 + y^2\right)$, где $a \ge h > 0$.

3. Найдите расстояние от начала координат до множества точек, заданного уравнением $x^2 - axy + y^2 = 1$, где a – данное число. (*Замечание.* При $|a| < 2$ уравнение $x^2 - axy + y^2 = 1$ задает эллипс, при $|a| = 2$ – пару параллельных прямых, а при $|a| > 2$ – гиперболу.)

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + 2y^2$, если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Перпендикуляр, опущенный из точки на параболу

Расстояние от точки до прямой, как известно, измеряется по перпендикуляру. Для расстояния от точки до кривой это не всегда так: перпендикуляр [2] не всегда единственен (рис. 11), он не всегда является кратчайшим из отрезков, соединяющих данную точку с точками кривой – бывает даже, что перпендикуляр является наидлиннейшим из таких отрезков (рис.12).

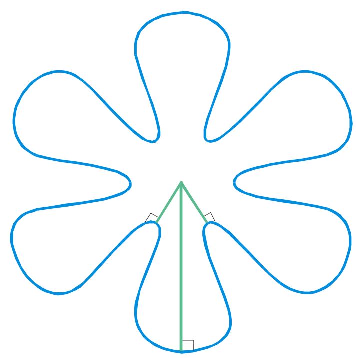
Рис.11

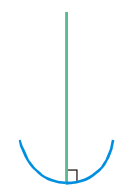
Рис.12

Как вы помните, мы решили задачу о расстоянии от точки $(0; b)$ до параболы $y = kx^2$. Если точка $(0; b)$ лежит достаточно низко (точнее, если $b \le 1/(2k)$), то ближайшая к ней точка параболы – начало координат. Если же $b > 1/(2k)$, то это не так: окружность радиусом b с центром $(0; b)$ пересекает параболу более чем в одной точке (рис.13); из точки $(0; b)$ можно опустить на параболу не один, а три перпендикуляра.

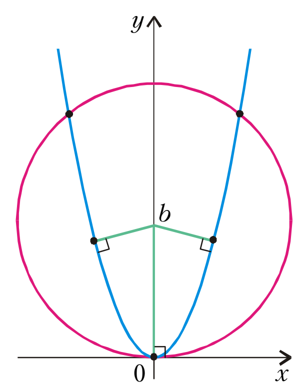

Рис.13

Полукубическая парабола – эволюта параболы

Теперь выясним, из каких точек сколько перпендикуляров можно провести к параболе $y = x^2$. (Читатель, если пожелает, легко проведет вычисления для параболы $y = kx^2$.) Для этого рассмотрим квадрат расстояния

[2] *Перпендикуляр (иначе говоря, нормаль) к кривой в данной точке – это прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная касательной, проведенной в данной точке.*