Расстояние от точки (0; b) до параболы $y = kx^2$

Итак, *найдем расстояние от данной точки $A(0;\ b)$ до параболы, заданной уравнением $y = kx^2$, где $k > 0$.* Что такое расстояние от точки до параболы? Это наименьшее из расстояний AM, где $M(x;\ kx^2)$ – точка параболы, т.е. это наименьшее значение функции

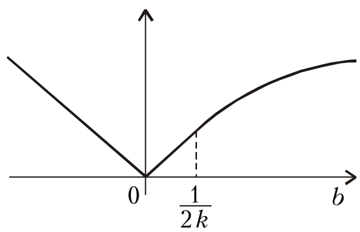

Рис.7

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \left(b - kx^2\right)^2}.$$

Обозначив $t = x^2$, имеем

$$f^2(x) = k^2t^2 + (1 - 2kb)t + b^2.$$

Квадратичная функция принимает свое минимальное значение в точке $t_0 = \dfrac{2kb - 1}{2k^2}$. При этом, как легко посчитать,

$$f^2\left(\sqrt{\frac{2kb - 1}{2k^2}}\right) = \frac{b}{k} - \frac{1}{4k^2}.$$

Впрочем, надо помнить о том, что $t = x^2 \ge 0$: если $2kb - 1 < 0$, то минимальное значение функция $f(x)$ принимает при $x = 0$. Итак,

$$\min f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{b}{k} - \dfrac{1}{4k^2}}, & \text{если } b > \dfrac{1}{2k}, \\ |b|, & \text{если } b \le \dfrac{1}{2k}. \end{cases}$$

Зависимость $\min f$ от b изображена на рисунке 7.

Расстояние от точки (a; a) до гиперболы $xy = 1$

Продолжим тренировку. Рассмотрим гиперболу. Но не ту, что нам понадобится в задаче о лежачем цилиндре, а более привычную, заданную уравнением $xy = 1$. Очевидно, при $0 < a < 1$ расстояние r от точки $A(a;\ a)$ до гиперболы равно $(1 - a)\sqrt{2}$.

При $a > 1$ ответ более сложен. До тех пор, пока окружность с центром A и радиусом AK имеет с гиперболой только одну общую точку (рис.8), расстояние равно $AK = (a - 1)\sqrt{2}$. Но при достаточно больших a гипербола имеет с такой окружностью не одну, а три общие точки (рис.9). Расстояние от точки A до гиперболы в таком случае равно $AN < AK$.

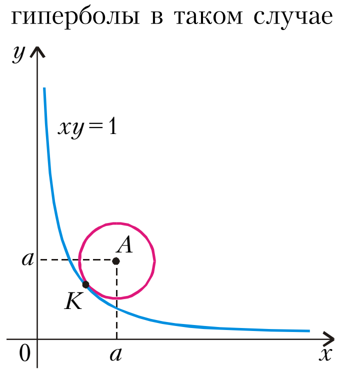

Рис.8

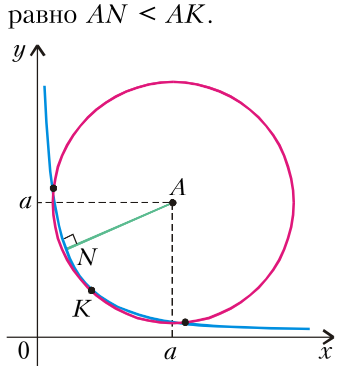

Рис.9

Узнаем, при каких a точка пересечения одна, а при каких – три. Уравнение окружности с центром A и радиусом $(a - 1)\sqrt{2}$ записать легко:

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 = 2(a - 1)^2.$$

Чтобы узнать, в скольких точках заданная этим уравнением окружность пересекает гиперболу, выясним, сколько решений имеет уравнение

$$(x - a)^2 + \left(\frac{1}{x} - a\right)^2 = 2(a - 1)^2.$$

Раскрыв скобки, запишем уравнение в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4a = 2.$$

Обозначим $t = x + \dfrac{1}{x}$. Поскольку $t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2$, исследуемое уравнение превращается в квадратное:

$$t^2 - 2at + 4a - 4 = 0.$$

Как известно, $t \ge 2$, причем значению $t = 2$ соответствует единственное значение $x = 1$, а любому $t > 2$ соответствуют два взаимно обратных значения x. Таким образом, мы должны выяснить, при каких $a > 1$ уравнение $t^2 - 2at + 4a - 4 = 0$ имеет единственное решение $t \ge 2$, а при каких – два решения.

Нам поможет то, что окружность проходит через точку K и поэтому $t = 2$ – корень уравнения. По теореме Виета, сумма корней равна $2a$, и поэтому отличный от $t = 2$ корень равен $2a - 2$. Решив неравенство

$$2a - 2 \ge 2,$$

получаем ответ: при $a > 2$ окружность и гипербола имеют три общие точки, а при $1 < a \le 2$ – лишь одну.

Итак, при $1 < a \le 2$ расстояние от точки A до гиперболы равно $AK = (a - 1)\sqrt{2}$. А при $a > 2$ это расстояние меньше длины отрезка AK. На сколько меньше? На этот вопрос наше рассуждение ответа не дает.

Считали, считали, а расстояние r так и не нашли. Почему? Похоже, мы делали не то, что нужно. Да. Простите нас, уважаемые читатели! Мы это так, понарошку заблудились. Вернемся же на путь истинный.

Для вычисления величины r рассмотрим расстояние от точки $A(a;\ a)$ до точки $M\left(x;\ \dfrac{1}{x}\right)$:

$$\rho(x) = \sqrt{(a - x)^2 + \left(a - \frac{1}{x}\right)^2}.$$

Очевидно, r – это минимальное значение функции $\rho(x)$. Поэтому мы возведем ρ в квадрат и продифференцируем:

$$\left(\rho^2(x)\right)' = 2(x - a) + 2\left(a - \frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

Приравняем производную нулю:

$$x - a + \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0,$$

$$x^4 - ax^3 + ax - 1 = 0,$$

$$\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - ax + 1\right) = 0.$$