Как и для «стоячего» цилиндра, рассмотрим функцию

$$g(r) = r^2H - 2r^3$$

и продифференцируем ее:

$$g'(r) = 2rH - 6r^2.$$

Функция g обращается в ноль в концах отрезка $[0;\ H/2]$, а ее производная на интервале $(0;\ H/2)$ обращается в ноль при $r = H/3$. (График функции g изображен на рисунке 4.) Значит, максимальное значение на интервале $(0;\ H/2)$ функция принимает при $r = H/3$. Этому значению соответствует величина

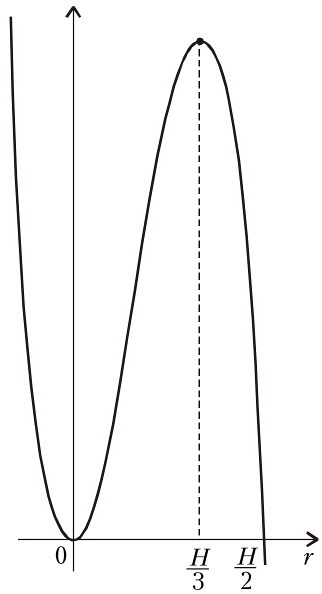

Рис.3

Рис.4

$$h = R\left(1 - \frac{2H/3}{H}\right) = \frac{R}{3};$$

следовательно, максимальный объем «лежачего» цилиндра равен

$$2\pi r^2 h = \frac{2\pi}{27} H^2 R.$$

Например, при $R = 1$ и $H = 9$ объем «лежачего» цилиндра равен 6π.

А объем конуса, в который этот цилиндр вписан, равен

$$\frac{\pi}{3} R^2 H = 3\pi.$$

Внутри одного тела (конуса) удалось расположить другое тело (цилиндр) вдвое большего объема! Представляете, какое значение для практики может иметь наша конструкция?!

В чем ошибка?

Чудес не бывает; конечно же, мы ошиблись. При малых r вписанный цилиндр касается боковой поверхности конуса двумя своими точками (рис.5), а при возрастании r высота h вписанного цилиндра уменьшается, и в некоторый момент происходит «раздвоение» каждой из точек касания. С этого момента рисунок 3 не

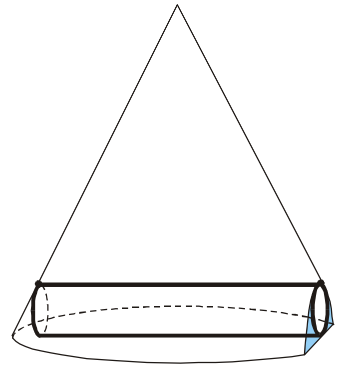

Рис.5

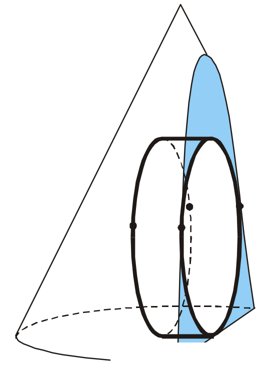

Рис.6

соответствует действительности: цилиндр касается поверхности боковой конуса не двумя, а четырьмя точками (рис.6).

Правильный ответ

Необходимость разбора двух разных случаев касания значительно усложняет решение задачи. Тем не менее, мы сможем ее решить и получим следующий ответ: при $R \ge H$ максимальный объем «лежачего» цилиндра, вписанного в конус с высотой H и радиусом основания R, равен

$$V = \frac{2}{27}\pi R H^2,$$

а при $R \le H$ максимальный объем равен

$$\frac{\pi R^3\sqrt{2}\left(\sqrt{12H^2 + 13R^2 + R\sqrt{24H^2 + 25R^2}} - 3R\sqrt{2}\right)^2}{9H\sqrt{6H^2 + 5R^2 + R\sqrt{24H^2 + 25R^2}}}.$$

(При $R = H$, между прочим, можно пользоваться обеими формулами. В самом деле, подставив $H = R$ во вторую формулу, получим $V = \frac{2}{27}\pi R^3$. Убедитесь в этом!)

Мы не будем сразу рассказывать решение задачи о лежачем максицилиндре, а потренируемся – разберем более простые (и, на наш взгляд, более важные и интересные) задачи. Читателю, владеющему математическим анализом, можно пропустить несколько следующих разделов статьи. А менее опытным читателям, надеемся, эта тренировка поможет благополучно во всем разобраться.

Расстояния от точки до параболы, эллипса, гиперболы

Как известно, сечение конуса вертикальной плоскостью – гипербола. (А если вы еще не знаете этого, не огорчайтесь: все, что нам нужно, мы докажем!) Поэтому в решении задачи о лежачем цилиндре мы будем использовать формулы для расстояния от точки до гиперболы. Но для тренировки мы сначала рассмотрим вместо гиперболы параболу $y = kx^2$. (Никакой существенной разницы нет, просто для многих школьников парабола привычнее гиперболы.) И точку пока рассмотрим не произвольную, а лежащую на оси симметрии параболы.

Иллюстрация П.Чернуского