ВАРИАНТЫ

Материалы вступительных экзаменов 2001 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+y+1} + 7 \cdot 2^{y-5} = 4, \\ \sqrt{2x + y^2} = x + y. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 - 3x}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}.$$

4. Через точку A проведены две прямые: одна из них касается окружности в точке B, а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD. Найдите AC, BC и радиус окружности R, если $BD = 5$, $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\angle BDC = \arccos \sqrt{\frac{5}{21}}$.

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскую поверхность. Точка F – середина ребра CD, точка S лежит на прямой AB, $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F, чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$. Точки A_1, B_1, C_1 – середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найдите 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1; 2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1; 3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{20-2x}\left(99 - 2x - x^2\right) + \log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20 - 2x) \le 3.$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 6$ и $AC = 2$, проведены медиана AA_1, высота BB_1 и биссектриса CC_1. Найдите площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) BB_1, CC_1 и BC; 2) AA_1, BB_1 и CC_1.

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} y^2 + 3xy + 1 \le 0, \\ 9x^2 - 12x - 8y \le 0. \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R. При каком соотношении между r и R это возможно? Найдите радиус наименьшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2}\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2, а прямая l_2 – в точках B_1 и B_2. Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2, $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны прямой O_1O_2. Через точку B_1 проведена прямая l_3, перпендикулярная прямой l_2. Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A, а прямую l_3 – в точке B. Найдите A_1A_2, B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1.

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, боковое ребро образует с основанием угол, равный $\operatorname{arctg} 4$. Точки E, F, K выбраны на ребрах AB, AD и SC соответственно так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3}$. Найдите 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK; 2) расстояние от точки D до плоскости EFK; 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK.

5. Найдите все a, при которых уравнение

$$\log_3\left(x + \sqrt{5 - a}\right) + \log_{1/3}(a - 2 - x) = \log_9 4$$

имеет решение.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На горизонтальной поверхности стола покоится чаша с небольшой по сравнению с размерами чаши шайбой массой m (рис.1). Нижняя часть AB внутренней поверхности чаши есть часть сферы радиусом R. Глубина чаши $H = 3R/5$, ее внутренняя поверхность гладкая. Шайба начинает скользить без начальной скорости и при движении не отрывается от чаши, а чаша остается в покое. Шайба достигает точки C, для которой угол между радиусом OC и вертикалью равен α ($\cos\alpha = 4/5$). 1) Найдите скорость шайбы в точке C. 2) Найдите силу трения между чашей и столом при прохождении шайбой точки C.

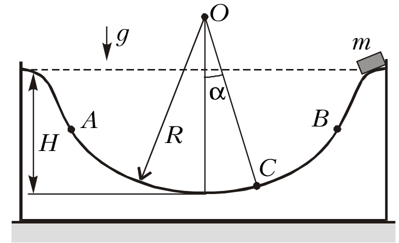

Рис. 1

2. Температура гелия уменьшилась в $k = 3$ раза в процессе $pV^2 = \text{const}$ (здесь p – давление газа, V – его объем). При этом его внутренняя энергия изменилась на 50 Дж. Найдите: 1) максимальное давление газа p_{max}; 2) объем газа V_2 в конечном состоянии. Минимальное давление газа в этом процессе составило $p_{min} = 10^5$ Па.

3. В электрической цепи, представленной на рисунке 2, диоды D_1 и D_2 идеальные. Считая параметры элементов

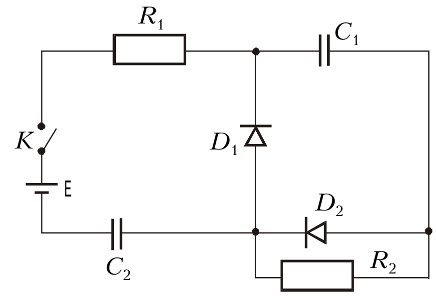

Рис. 2

цепи известными, определите: 1) ток через батарею сразу после замыкания ключа K; 2) количество теплоты, выделившееся в схеме после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. Проводник массой M и длиной l подвешен за концы к непроводящему потолку с помощью двух одинаковых проводящих пружин, каждая жесткостью k (рис.3). К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкостью C. Вся конструкция находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости конструкции. Проводник смещают вниз на расстояние h от положения равновесия, а затем отпускают. Определите скорость проводника, когда он снова окажется в положении равновесия. Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь.

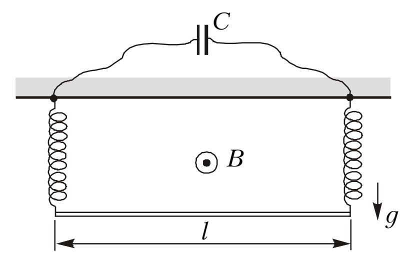

Рис. 3

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $d = 8$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см. Источник сместили вниз на расстояние $h = 4$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

Вариант 2

1. Ящик с шайбой удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (рис.4).

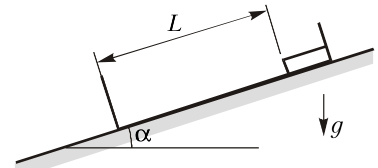

Рис. 4

Ящик и шайбу одновременно отпускают, и ящик начинает скользить по наклонной плоскости, а шайба – по дну ящика. Через время $t = 1$ с шайба ударяется о нижнюю стенку ящика. Коэффициент трения скольжения между шайбой и ящиком $\mu_1 = 0{,}23$, а между ящиком и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0{,}27$. Масса ящика вдвое больше массы шайбы. 1) Определите ускорение шайбы относительно наклонной плоскости при скольжении шайбы по ящику. 2) На каком расстоянии L от нижней стенки ящика находилась шайба до начала движения?

2. В цилиндре под поршнем находятся 0,5 моля воды и 0,5 моля пара. Жидкость и пар медленно нагревают в изобарическом процессе так, что в конечном состоянии температура пара увеличивается на ΔT. Какое количество теплоты было подведено к системе жидкость—пар в этом процессе? Молярная теплота испарения жидкости в заданном процессе равна Λ. Внутренняя энергия ν молей пара равна $U = \nu \cdot 3RT$ (R – универсальная газовая постоянная).

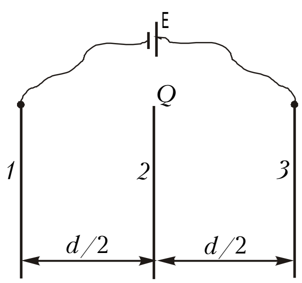

Рис. 5

3. Батарея с ЭДС E подключена к удерживаемым неподвижно пластинам *1* и *3* плоского конденсатора (рис.5). Площадь пластин S, расстояние между ними d. Посредине между этими пластинами расположена закрепленная неподвижно металлическая пластина *2*, на которой находится заряд Q. Пластину *1* отпускают. Какую работу совершит батарея к моменту соударения пластин *1* и *2*? Силой тяжести и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

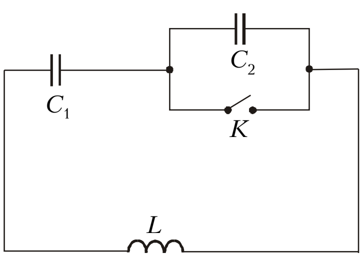

Рис. 6

4. При замкнутом ключе K в LC-контуре (рис.6) происходят незатухающие свободные колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе емкостью C_1 максимально и равно U_1, ключ размыкают. Определите максимальное значение тока в контуре после размыкания ключа. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.

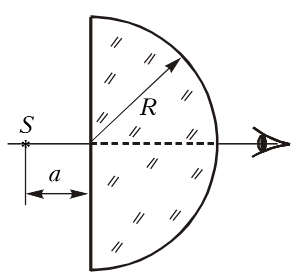

Рис. 7

5. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1{,}5$ вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом $R = 10$ см (рис.7). Через такую линзу рассматривается точечный источник света S, расположенный на расстоянии $a = R/2$ от плоской поверхности полушара. На каком расстоянии от этой поверхности наблюдатель видит изображение источника света? *Указание*: для малых углов $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

Публикацию подготовили М.Балашов, В.Можаев, Ю.Чешев, М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+6}}{2x-3} < 1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_4(3x-8) < \log_{\frac{1}{4}}(x-2) + \frac{3}{2}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin y = \dfrac{7}{4}, \\ \cos^2 x + \sqrt{3}\cos y = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

4. Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = 6$; $AC = 4$) является нижним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 6\sqrt{2}$. На ребрах AA_1, B_1C_1, AC взяты, соответственно, точки M, N, L так, что $A_1M = 2\sqrt{2}$, $B_1N = 3$, $CL = 1$. Через точку L проведена прямая, которая параллельна прямой MN и пересекает боковую грань C_1B_1BC в точке E. Найдите а) длину отрезка MN; б) длину отрезка LE.

5. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(a+2)x^2 + (2a-1)x + a^2 - 5a - 4 = 0$$

имеет только целые корни.

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\frac{|4x-2|-9}{x-2} \le 1.$$

2. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} ax + 2y = 3a - 4, \\ (3a-1)x + (a+3)y = a^2 + 1 \end{cases}$$

не имеет решений.

3. Решите уравнение

$$\log_3 \cos x = \log_3(2 + 3\sin x) - 1.$$

4. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 9. Боковые ребра пирамиды равны $5\sqrt{3}$. На ребре AB взята точка D так, что $AD = 3$. Через точки C, D проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости основания пирамиды. Требуется а) найти объем пирамиды $SABC$; б) определить, в каком отношении плоскость α делит объем пирамиды.

5. Найдите сумму всех корней уравнения

$$2\cos 3x + 8|\sin x| - 7 = 0,$$

принадлежащих отрезку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Тело массой m, брошенное под углом α к горизонту, при движении имело минимальную кинетическую энергию E. Найдите изменение импульса тела за все время движения.

2. Телу массой m, подвешенному на нити длиной l, сообщают направленную горизонтально начальную скорость v, в результате чего тело совершает колебания. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда скорость тела равна $v/2$.

3. Один моль идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из изохоры *1–2*, изобары *2–3* и прямой *3–1*. Температуры в точках *1*, *2* и *3* связаны соотношением $T_3 = 2T_2 = 3T_1$. Определите КПД цикла.

4. Водяной пар, находящийся в сосуде объемом V = 10 л при температуре t = 100 °С и давлении p = 50 кПа, изотермически сжимают. Во сколько раз уменьшился объем, если в конце процесса в сосуде содержалось m = 1,45 г воды?

5. Два конденсатора, заряженные от одного и того же источника, соединили первый раз одноименными полюсами, а второй – разноименными. При этом полная энергия электрического поля, запасенная в системе, во втором случае была вдвое меньше. Найдите отношение емкостей конденсаторов.

6. Электрон со скоростью v влетает в плоский конденсатор параллельно его обкладкам. Его импульс за время пролета через конденсатор возрастает вдвое. Определите, на сколько смещается электрон относительно первоначального направления, если к обкладкам конденсатора приложено напряжение U, расстояние между ними d. Заряд e и масса m электрона известны.

7. Аккумулятор с внутренним сопротивлением r был заряжен от источника с напряжением U током I. Какую максимальную полезную мощность можно получить от этого аккумулятора?

8. Проводник длиной l = 0,5 м и массой m = 0,2 кг лежит на горизонтальных рельсах. Если по проводнику пропустить ток I = 4,0 А, то он начинает двигаться в вертикальном магнитном поле с индукцией B = 0,2 Тл. Какую минимальную силу надо приложить к проводнику, чтобы он начал двигаться, если такое же по величине магнитное поле будет направлено горизонтально вдоль рельсов?

9. Колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности, резонирует на длине волны λ. Через какое время после начала колебаний энергия, выделяемая в катушке индуктивности, в 4 раза больше энергии, запасенной в конденсаторе? В первый момент конденсатор полностью заряжен.

10. На газету кладут прозрачную пластину толщиной H, сделанную из материала, для которого угол полного внутреннего отражения равен α. На каком расстоянии от верхней поверхности пластины будут видны буквы, если на них смотреть сверху?

Публикацию подготовили
Ю.Колмаков, Г.Померанцева

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Три мотоциклиста стартуют одновременно из одной точки кольцевого шоссе в одном направлении. Первый мотоциклист впервые догнал второго, пройдя 4,5 круга после старта, а за полчаса до этого он впервые догнал третьего мотоциклиста. Второй мотоциклист впервые догнал третьего через три часа после старта. Сколько кругов в час проезжает первый мотоциклист?

2. Решите уравнение

$$|9\sin^2 x + 8\cos 2x| = |5 + 3\cos x|$$

и укажите число его решений на промежутке $\left[-\frac{\pi}{4}; 3\pi\right]$.

3. Решите неравенство

$$\log_{x+1}\frac{5x+4}{x+3} \le \log_{x+1}\frac{x+2}{1-x}.$$

4. Из всех прямоугольных параллелепипедов с периметром каждой боковой грани 6 найдите параллелепипед наибольшего объема. В ответе укажите объем.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно 2. Найдите расстояние от центра грани $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости, проходящей через вершины B, D и C_1.

Вариант 2

(физический факультет)

1. В правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, вписан конус. Найдите объем конуса, если угол между ребром пирамиды и плоскостью основания равен α.

2. Решите уравнение

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3\frac{1-2x}{x} \le 0.$$

4. Найдите сумму корней уравнения

$$x^{3-\lg x} = 100.$$

5. Найдите угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{x^3}{9}$, проведенная в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Основание пирамиды – равнобедренный треугольник с основанием 6 и высотой 9. Каждое боковое ребро равно 13. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\frac{1-\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{ctg}x} = 2\sin x.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{x+27}{16-2x} < x.$$

4. Решите уравнение

$$\log_2\left(9-2^x\right)=3-x.$$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Вариант4

(факультет технологии и предпринимательства)

1. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 4, 4, $2\sqrt{2}$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\sin^3 x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg}x)=\cos 2x.$$

3. Решите неравенство

$$4^x<2^{x+1}+3.$$

4. Решите уравнение

$$\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0.$$

5. Найдите максимумы функции

$$f(x)=\frac{20x}{x^2+1}.$$

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\cos\frac{\pi-t}{2}\sin\frac{4\pi+3t}{2}=7-8\cos^2\frac{2\pi+t}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{4t^2-4t+1}\ge 2(1-|t-1|).$$

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\left(\dfrac{125}{27}\right)^{2x-1}\left(\dfrac{9}{25}\right)^{x^2}<0{,}6^{-1},\\ \sqrt{x^2}\le 3.\end{cases}$$

4. Найдите все значения l, при которых неравенство

$$2lx^2+(2l+10)x+13l+5>0$$

выполняется при всех x.

5. Вычислите

$$\frac{1}{\log_{c^2b^{-1}}c^2}-3\log_{\sqrt{b}}c^2b^{1/3},\text{ если }\log_{bc}cb^{0,25}=\frac{7}{22}.$$

6. Вычислите

$$\log_2\left|\frac{\cos\frac{30t-3\pi}{5}\cos\frac{10t-\pi}{5}\sin\frac{10t-\pi}{5}}{\sin\frac{30t-3\pi}{5}\cos\frac{20t-2\pi}{5}+2\sin 5t\cos 5t}\right|.$$

7. Найдите $\sin 4x$, если $\operatorname{tg}\left(x-45^\circ\right)=-2$.

8. Найдите $\dfrac{x_1^2}{x_2}+\dfrac{x_2^2}{x_1}$, где x_1, x_2 – корни уравнения

$$2x^2+4x-1=0.$$

9. При каких значениях l сумма кубов корней уравнения $x^2+x+l=0$ равна −25?

10. Постройте график функции

$$y=\operatorname{tg}(\pi-x)\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

11. Постройте график функции

$$y=\sqrt{\left(|x+1|-|x-1|\right)^2}-1.$$

12. Постройте график функции

$$y=\left|2^{\log_8 x^3}-1\right|.$$

13. Разность цифр двузначного числа равна 3. Если цифры переставить, то получится число, составляющее 1,75 первоначального. Найдите исходное число.

14. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6. Двугранный угол между основанием и боковой гранью равен 45°. Найдите объем пирамиды и площадь ее боковой поверхности.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Стрела выпущена вертикально вверх с начальной скоростью 39,2 м/с. Определите координату и скорость стрелы через 2 с.

2. Какую скорость должен иметь искусственный спутник, чтобы обращаться вокруг Земли по круговой орбите на высоте 600 км над поверхностью Земли? Радиус Земли 6400 км, масса Земли $6\cdot10^{24}$ кг.

3. Чтобы охладить 0,2 кг воды, взятой при 23 °С, до 8 °С, в нее бросают мелкие кусочки льда, имеющие температуру 0 °С. Какое количество льда потребуется для охлаждения воды? Удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг.

4. В комнате объемом 40 м^3 при температуре 20 °С относительная влажность воздуха составила 20%. Какую массу воды нужно испарить для увеличения относительной влажности воздуха до 50%? Плотность насыщенного водяного пара при 20 °С равна $17{,}3\cdot10^{-3}$ кг/м^3.

5. Два одинаковых металлических шарика заряжены так, что заряд одного из них в 5 раз больше другого. Шарики привели в соприкосновение и раздвинули на прежнее расстояние. Во сколько раз (по модулю) изменилась сила взаимодействия шариков, если шарики были заряжены разноименно?

6. Источник с ЭДС 2,0 В и внутренним сопротивлением 0,8 Ом замкнут никелиновой проволокой длиной 2,1 м и сечением 0,21 мм^2. Каково напряжение на зажимах источника? Удельное электрическое сопротивление никелина 0,42 Ом · мм^2/м.

7. В магнитном поле с индукцией 0,02 Тл протон описал окружность, радиус которой 0,1 м. Найдите скорость протона.

8. Высота Солнца над горизонтом 40°. Под каким углом к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы солнечными лучами осветить дно вертикального колодца?

9. Свет какой частоты следует направить на поверхность платины, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была 3000 км/с? Работа выхода электронов из платины 10^{-18} Дж. Постоянная Планка $6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с, масса электрона $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

10. Найдите энергию и импульс фотона для инфракрасных лучей с частотой 10^{12} Гц. Скорость света $3\cdot10^8$ м/с, постоянная Планка $6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с.

Публикацию подготовили С.Жданов, Б.Кукушкин, Е.Пантелеева, М.Чистова,Г.Шадрин