ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. с.28)

1. Первыми тремя взвешиваниями можно определить вес первого и второго, второго и третьего, третьего и первого яблок. Сумма найденных значений дает удвоенную величину веса трех первых яблок, откуда определяется их общий вес. Для остальных 10 яблок достаточно 5 взвешиваний, чтобы найти их суммарный вес. Итого: потребуется 8 взвешиваний.

2. Для каждой кошки отметим более толстого кота, который сидит рядом с ней, тогда каждый отмеченный кот будет соседствовать с кошкой, которая тоньше его.

Предположим, не все коты отметятся, тогда отмеченных котов будет 9 или меньше. Поскольку каждый из котов может соседствовать не более чем с двумя кошками, то рядом с отмеченными котами окажется не более 18 кошек, что меньше их общего количества. Противоречие.

Итак, рядом с любым котом сидит кошка, которая тоньше его.

3. Заметим, что результат задачи не изменится, если хорды PA, PB, PC заменить наименьшими дугами $\overset{\smile}{PA}$, $\overset{\smile}{PB}$, $\overset{\smile}{PC}$, стягиваемыми этими хордами. Далее заметим, что как бы ни располагалась точка P на окружности, сумма длин указанных дуг не меньше, чем сумма длин двух наименьших дуг из набора $\left\{\overset{\smile}{AB}, \overset{\smile}{BC}, \overset{\smile}{CA}\right\}$. При этом наименьшее значение суммы достигается, когда точка P совпадает с вершиной наибольшего угла в треугольнике ABC.

Ответ: почту P следует разместить в том поселке, который располагается в вершине наибольшего угла треугольника ABC (если в этом треугольнике два наибольших угла или все углы равны, то в любом из них).

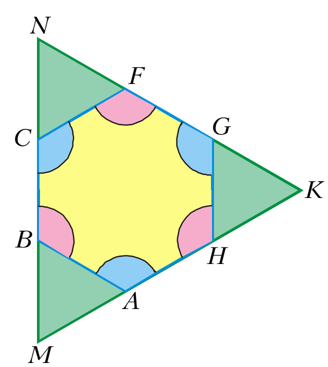

Рис. 1

4. Продолжим стороны AH, BC и FG до пересечения в точках M, N, K (рис.1). Треугольники MAB, KHG и FCN равны по стороне и двум прилегающим к ней углам. Следовательно, треугольник MNK равносторонний. Из этого следует $BC = FG = HA$.

5. Заметим, что сумма очков всех 28 костей домино равна 168. Семь костей домино, взятых каждым игроком, могут иметь сумму очков, не меньшую 15 и не большую 69.

Пусть a – сумма очков Бабы, b – сумма очков Табриза, c – сумма очков Гамида и d – сумма очков Эльмира. Из условия задачи следуют равенства

$$c + d = 84,\ a + b = 84,\ a - b = \frac{27}{7}(c - d)$$

Сложив второе и третье равенства и учитывая замену $c = 84 - d$, находим $2a = 84 + \frac{27}{7}(84 - 2d)$, или $a = 204 - \frac{27}{7}d$. Поскольку число a – целое, то d должно быть кратным 7: $d = 7k$, где k – натуральное. Тогда $a = 204 - 27k$. Из ограничений $15 \le a \le 69$ следует $5 \le k \le 7$. Значение $k = 6$ невозможно, так как иначе числа a, b, c, d оказываются равными:

$a = b = c = d = 42$, что противоречит условию задачи. В случае $k = 5$ находим $a = 69$, $b = 15$, $c = 49$, $d = 35$; в случае $k = 7$ получаем $a = 15$, $b = 69$, $c = 35$, $d = 49$. И в том, и в другом случае у кого-то – Бабы или Табриза – оказываются 7 костей с наименьшей суммой очков 15, а у другого – 7 костей с наибольшей суммой очков 69. Таким образом, у Бабы и Табриза на руках обязательно окажутся следующие 12 костей:

$$0\times0,\ 1\times0,\ 1\times1,\ 2\times0,\ 2\times1,\ 3\times0,$$
$$6\times6,\ 6\times5,\ 6\times4,\ 6\times3,\ 5\times5,\ 5\times4.$$

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Вася ошибся в расчетах. Среди 13 столбиков, насчитанных им при ходьбе в одну сторону, должно быть 6 троек столбиков с высотой 1 м, 2 м и 3 м, а также одна пара столбиков с высотой 1 м и 2 м или 2 м и 3 м. В любом случае при ходьбе в обратную сторону Вася должен был насчитать 6 пар столбиков, высота в которых возрастала, а это противоречит условию.

2. Поскольку в уменьшаемом и вычитаемом сумма цифр одинакова, то они имеют одинаковые остатки при делении на 9. Следовательно, их разность делится на 9, и профессору Мумбуму-Плюмбуму не удастся найти простое число указанного вида.

3. Пусть в больнице находятся a врачей и b больных, причем сумма температур врачей равна A, а сумма температур больных равна B. По условию,

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} = 2\cdot\frac{A+B}{a+b}.$$

Это равенство несложно преобразовать к виду

$$ab(b-a)\left(\frac{A}{a} - \frac{B}{b}\right) = 0.$$

Поскольку $\frac{A}{a} \neq \frac{B}{b}$, заключаем, что $a = b$. Итак, врачей и больных в больнице одинаковое количество.

4. *Ответ*: 8. Все 22 ученика, писавшие слово «КРОТ», написали либо «КОТ», либо «РОТ». Все остальные либо написали правильное слово, либо написали слово «ОТ». Таким образом, из 30 написанных слов «КОТ» и «РОТ» 22 раза эти слова написаны по ошибке, а остальные 8 раз – правильно.

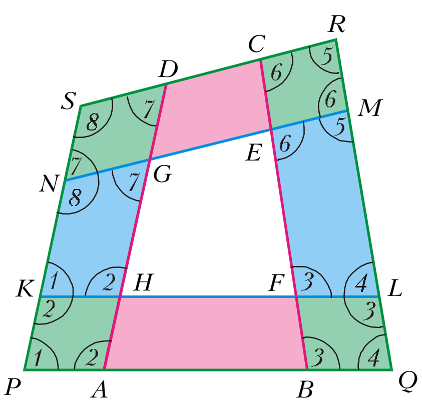

Рис. 2

5. Введем обозначения, показанные на рисунке 2. Всякий параллелограмм с равными высотами является ромбом, поэтому по четырем углам рисунка 2 расположены ромбы. Из трапеций, обрамляющих внутренний четырехугольник на рисунке 2, образуем вытянутый параллелограмм, показанный на рисунке 3. Две равные противоположные стороны этого параллелограмма образуют периметры заданных в условии задачи четырехугольников. В этом нетрудно убедиться, привлекая соотношения

$$PQ = PA + AB + BQ = HA + AB + BF,$$

$$RS = RC + CD + DS = EC + CD + DG.$$

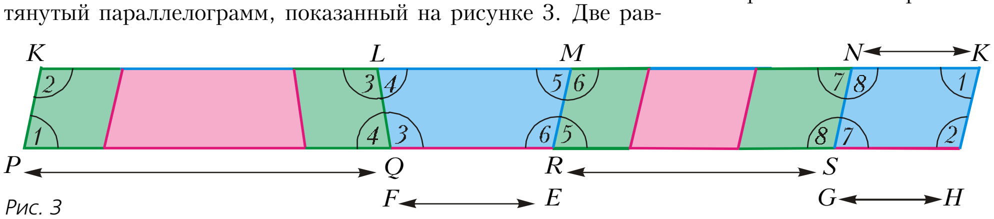

Рис. 3

Характерные задачи вступительных экзаменов по физике в МФТИ

1. $F_{\min} = (M+m)g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)/2$.

2. $m_{O_2} = 4\pi R_3^2 \rho RT/(\mathrm{M}g) \approx 10^{18}$ кг, где $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, $\mathrm{M} = 32$ г/моль – молярная масса кислорода.

3. $p = B_0^2 ba^2/(2R)$.

4. $v = 2\pi R\Gamma/T \approx 0{,}06$ см/с, где $\Gamma = 0{,}4$ – увеличение линзы, $T = 60$ с – период обращения секундной стрелки.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left(0;\ \log_2\frac{128}{71}\right)$, $(2\log_2 7 - 6;\ 4 - \log_2 7)$. *Указание.* Из второго уравнения после возведения в квадрат получаем, что либо $x = 0$, либо $y = 1 - x/2$.

2. $\pi n/2$, $\pm\pi/3 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание*. Применяя формулы

$$\cos^3 x = (1/4)\cos 3x + (3/4)\cos x,$$

$$\sin^3 x = (3/4)\sin x + (1/4)\sin 3x,$$

приведем уравнение к системе

$$\begin{cases} \sin 4x = 4\sin 2x\cos 2x\cos x, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

3. $(-\infty;\ -1)\cup\{0\}\cup(4;\ +\infty)$. *Указание.* Неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-3x} > 2, \\ \sqrt{x^2-2x+4} \le 2 - \sqrt{x^2-3x}. \end{array}\right.$$

4. $AC = 32\sqrt{3/35}$, $BC = 4\sqrt{6/5}$, $R = 3\sqrt{7/10}$. *Указание.* Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \angle ADB = \beta$, $\angle BCD = \gamma = \alpha + \beta$ (рис.4). Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$ и $\sin\gamma$, а затем несколько раз примените теорему синусов для треугольников ABC и BCD.

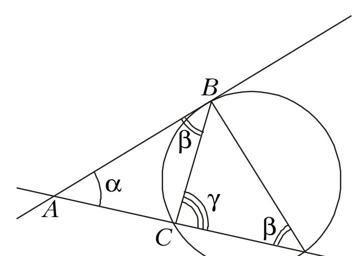

Рис. 4

5. Оптимальный путь состоит из двух отрезков: SP и PF, где $P \in BC$, $PB = 2BC/5$. *Указание.* Наложим грань BCD на грань ABC так, чтобы ребро BC осталось на месте, а точка D попала в точку A (рис.5). В результате путь муравья превратится в ломаную линию, соединяющую точки S и F. Длина пути минимальна, если ломаная станет отрезком, соединяющим точки S и F. Отрезок SF пересекает BC в точке P. Проведем FK –

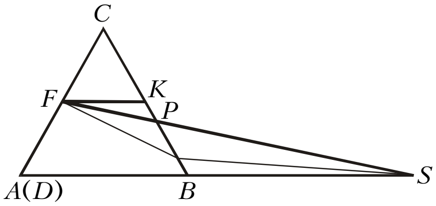

Рис. 5

среднюю линию треугольника ABC. Пользуясь подобием треугольников FKP и BPS, нетрудно получить, что $BP = \frac{2}{5}BC$.

6. 1) $\arccos\frac{47}{121}$; 2) $\frac{36}{\sqrt{259}}$; 3) $\frac{8}{3}$. *Указание.* Вычислите длины ребер и апофем пирамиды $ABCD$. Проведите отрезок $A_1F \| AC_1$ (рис.6) и найдите его длину. Угол FA_1B определите, пользуясь теоремой косинусов для ΔA_1FB. Расстояние l между прямыми BA_1 и AC_1 найдите из формулы для объема пирамиды $V = abl\cos\varphi/6$ (где a, b – длины скрещивающихся ребер пирамиды, l – расстояние, а φ – угол между ними), примененной к пирамиде AA_1C_1B, объем которой равен $1/4$ объема пирамиды $ABCD$. (В самом деле, $S_{AA_1C_1} = \frac{1}{4}S_{ADC}$, а высота из вершины B совпадает с высотой $ABCD$). Для вычисления радиуса r сферы следует заметить, что ее центр I лежит на высоте DO. Затем из треугольника A_1ID по теореме косинусов можно выразить A_1I через r, после чего воспользоваться равенством $HB = BO = 8$ (H – точка касания сферы с BA_1) и тем, что $A_1H + HB = A_1B$.

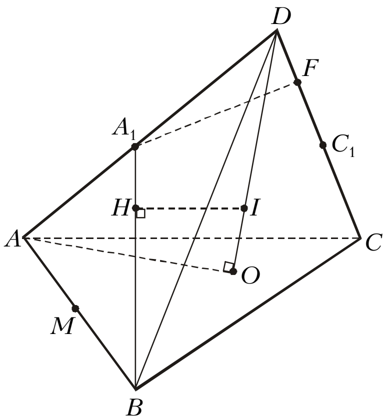

Рис. 6

Вариант 2

1. 6; −2. *Указание.* Выполните замену $t = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$.

2. $\pi/7 + \pi n$, $3\pi/7 + \pi n$, $5\pi/7 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Достаточно найти решения на промежутке $[0; \pi)$, на котором уравнение равносильно уравнению $\cos(7x/2)\sin(x/2) = 0$, $x \neq \pi n/3$.

3. $\left(-11; -1-3\sqrt{11}\right) \cup \left[-\sqrt{79}; 7\right] \cup \left[43/5; \sqrt{79}\right] \cup \left(-1+3\sqrt{11}; 9\right)$.

Указание. С помощью замены $z = \log_{20-2x}\left(99 - 2x - x^2\right)$ неравенство приводится к виду $z + \frac{2}{z} \leq 3$.

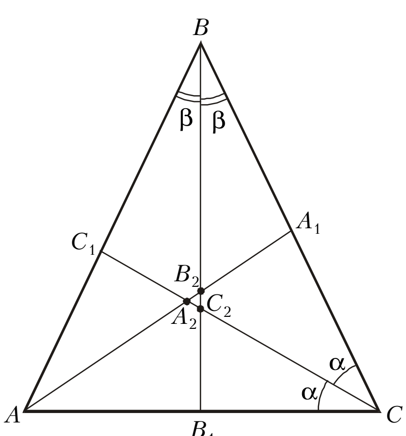

Рис. 7

4. 1) $3\sqrt{35}/7$; 2) $4\sqrt{35}/105$. *Указание.* Найдите в каких отношениях делятся отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 точками A_2, B_2, C_2 (рис.7), а затем вычислите отношение площадей треугольников $A_2B_2C_2$ и BC_2C к площади треугольника ABC.

5. $\left(\pm 2\sqrt{2}/3; 1 \mp \sqrt{2}\right)$. *Указание.* Умножая первое неравенство на 4 и складывая его со вторым, получаем

$$4y^2 + 12xy + 9x^2 - 4(2y + 3x) + 4 \leq 0,$$

$$(2y + 3x - 2)^2 \leq 0,$$

откуда $3x = 2 - 2y$, $y^2 + 3xy + 1 = 0$.

6. $R \geq r + \frac{2r}{\sqrt{3}}$; $\frac{R\left(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2/3}\right)}{r - \sqrt{R^2 - 2Rr - r^2/3} + R}$.

Из сечения $O_1O_2O_3$ (рис.8,*а*), где O_i – центры шаров радиуса r, получаем, что $R \geq AH = AO_1 + O_1H$, H – центр равностороннего треугольника $O_1O_2O_3$. По свойству касающихся шаров имеем $AO_1 = r$, $O_1H = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{O_1O_2}{2} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Таким образом, $R \geq r + \frac{2r}{\sqrt{3}}$.

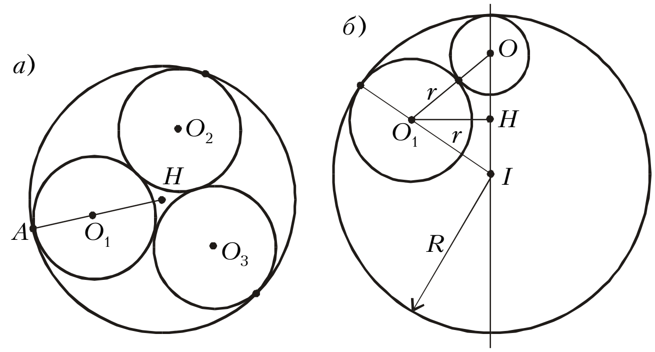

Рис. 8

Пусть I – центр сферы радиуса R (рис.8,*б*), O – центр искомого шара, а x – его радиус. Из условия $IO - IH = OH$ и соотношений

$$IH = \sqrt{IO_1^2 - O_1H^2} = \sqrt{(R-r)^2 - 4r^2/3},$$

$$IO = R - x,$$

$$OH = \sqrt{OO_1^2 - O_1H^2} = \sqrt{(r+x)^2 - 4r^2/3}$$

получаем уравнение

$$R - x - \sqrt{(R-r)^2 - 4r^2/3} = \sqrt{(r+x)^2 - 4r^2/3}.$$

Вариант 3

1. $(-\infty; -3] \cup \left[-1; \left(-1+\sqrt{17}\right)/8\right)$.

2. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2 + pn$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Левая часть уравнения равна $\operatorname{tg}x$ при $\cos 2x + \cos 3x \neq 0$.

3. $A_1A_2 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $AB_1 = 6$, $AB = 12$, $BB_1 = 6\sqrt{3}$.

4. 1) 25/27; 2) $2\sqrt{2}/15$;

3) $\arcsin\frac{12}{5\sqrt{17}}$. *Указание.* Поскольку $EF \| BD$ (рис.9), плоскость EFK пересекает плоскость SBD по прямой $MN \| BD$, а в сечении образуется пятиугольник $EMKNF$. Пусть P и G – середины EF и MN соответственно, L – проекция точки

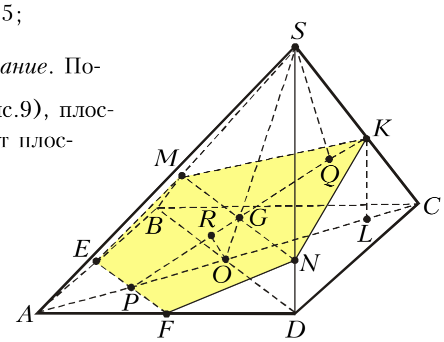

Рис. 9

K на плоскость $ABCD$, R и Q – проекции, соответственно, точек O и S на плоскость EFK. Тогда $L \in AC$, $Q \in PK$, $R \in PK$, $OR \perp PK$, $SQ \perp PK$, $KL \perp AC$. Обозначим $OD = a$, $SO = h$, ψ – угол между плоскостями EFK и $ABCD$, θ – угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью $ABCD$. Из условий находим a, h, $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\operatorname{tg}\psi$. Расстояние d от точки D до плоскости EFK равно длине отрезка OR, т.е.

$$d = PO\sin\psi = 2\sqrt{2}/15.$$

Находим синус угла между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды: $\sin\theta = 4/\sqrt{17}$.

Из равенств $\sin\theta = SG/SN$, $\cos\psi = SQ/SG$ следует, что

$$\sin\varphi = SQ/SN = \sin\theta\cos\psi = 12/\left(5\sqrt{17}\right).$$

Площадь сечения находится по формуле

$$S_0 = \frac{1}{2}\left(PK \cdot MN + PG \cdot EF\right).$$

5. $\left(3-\sqrt{13}\right)/2 < a \le 5$. Перепишем уравнение в виде

$$\log_3\left(x+\sqrt{5-a}\right) - \log_3(a-2-x) = \log_3 2,$$

что, в свою очередь, равносильно уравнению

$$x + \sqrt{5-a} = 2(a-2-x)$$

при условии $a - 2 > x$. Отсюда

$$2 - a < \sqrt{5-a}.$$

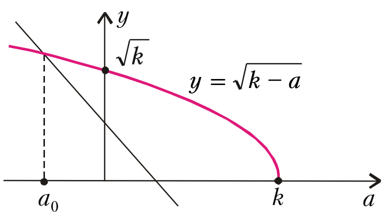

Рис. 10

Из рисунка 10 видно, что решение неравенства есть промежуток $\left(a_0; 5\right]$, где число a_0 найдем из условия $\sqrt{5-a_0} = 2 - a_0$, $a_0 = \left(3-\sqrt{13}\right)/2$.

6. $(0, 0, 0)$; $(-3/2, -1/2, -1)$; $(-5/6, -1/6, -1/2)$. *Указание*. Из третьего уравнения системы вычтем первое и прибавим удвоенное второе, получим

$$2z(x + y - 2z) = 0,$$

т.е. либо $z = 0$, либо $y = 2z - x$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. 1) Скорость шайбы в точке C найдем по закону сохранения энергии. В исходном положении шайба обладала только потенциальной энергией, равной mgH (за нулевой уровень потенциальной энергии примем дно чаши). В точке C шайба обладает как потенциальной, так и кинетической энергией. Потенциальная энергия равна $mgR(1-\cos\alpha)$, а кинетическая равна $mv^2/2$, где v – скорость шайбы в точке C. Закон сохранения энергии будет иметь вид

$$mgH = mgR(1-\cos\alpha) + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2g\left(H - R(1-\cos\alpha)\right)} = 2\sqrt{\frac{gR}{5}}.$$

2) Рассмотрим силы, действующие на шайбу при прохождении ею точки C (рис.11): это сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция опоры $\vec{N}$ со стороны чаши. Суммарная проекция этих сил на радиус OC сообщает шайбе центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{R} = N - mg\cos\alpha.$$

Отсюда находим силу реакции опоры:

$$N = \frac{mv^2}{R} + mg\cos\alpha = \frac{8}{5}mg.$$

По третьему закону Ньютона, на чашу будет действовать сила давления $\vec{N}'$, равная силе $\vec{N}$ по величине и направленная в противоположную сторону. Поскольку чаша неподвижна относительно стола, горизонтальная составляющая силы $\vec{N}'$, взятая с противоположным знаком, и будет равна силе трения между чашей и столом:

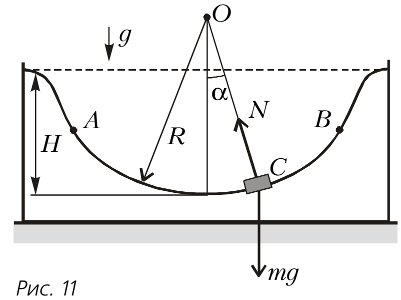

Рис. 11

$$F_{\text{тр}} = N\sin\alpha = \frac{24}{25}mg.$$

2. 1) Процесс $pV^2 = \text{const}$ с учетом уравнения состояния для идеального газа можно записать в переменных p и T в виде $\frac{T^2}{p} = \text{const}$.

Отсюда видно, что с уменьшением температуры давление газа также уменьшается. Следовательно, начальное давление гелия было максимальным, а конечное – минимальным. Исходя из этого, можно записать

$$\frac{T_1^2}{p_{\max}} = \frac{T_2^2}{p_{\min}},$$

где T_1 – начальная температура гелия, а T_2 – конечная. Из этого равенства находим

$$p_{\max} = p_{\min}\frac{T_1^2}{T_2^2} = k^2 p_{\min} = 9 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

2) Абсолютная величина изменения внутренней энергии гелия равна

$$|\Delta U| = c_V\nu\left(T_1 - T_2\right) = c_V\nu T_2\left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = c_V\nu T_2(k-1),$$

где $c_V = 3R/2$ – молярная теплоемкость гелия при постоянном объеме, ν – число молей гелия. Отсюда конечная температура равна

$$T_2 = \frac{|\Delta U|}{c_V\nu(k-1)}.$$

Для нахождения объема гелия в конечном состоянии воспользуемся уравнением состояния для идеального газа:

$$p_{\min}V_2 = \nu RT_2,$$

откуда

$$V_2 = \frac{\nu RT_2}{p_{\min}}.$$

Подставляя сюда выражение для T_2, окончательно получаем

$$V_2 = \frac{2|\Delta U|}{3(k-1)p_{\min}} = 0{,}17 \text{ л}.$$

3. 1) Сразу после замыкания ключа K падение напряжения на диоде D_2 равно нулю. Следовательно, ЭДС батареи равна падению напряжения на резисторе сопротивлением R_1, а ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

2) После замыкания ключа будет происходить зарядка последовательно соединенных конденсаторов емкостью C_1 и C_2. За время зарядки через батарею протечет заряд

$$q = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}.$$

Батарея при этом совершит работу

$$A = q\mathcal{E} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}^2.$$

Эта работа частично пойдет на увеличение энергии конденсаторов, а частично выделится в виде тепла. Энергия зарядившихся конденсаторов равна

$$W = \frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\mathcal{E}^2.$$

Следовательно, количество теплоты, которое выделится в схеме после замыкания ключа, равно

$$Q = A - W = \frac{C_1C_2\mathcal{E}^2}{2\left(C_1 + C_2\right)}.$$

4. При движении проводника со скоростью v в нем возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = vlB$. Поскольку проводник закорочен конденсатором, напряжение на конденсаторе всегда равно ЭДС индукции:

$$U_C = vlB.$$

Найдем удлинение Δx пружин в положении равновесия проводника из условия равновесия:

$$Mg = 2k\Delta x, \text{ и } \Delta x = \frac{Mg}{2k}.$$

Когда проводник сместили вниз на расстояние h от положения равновесия,удлинение пружины стало равным

$$\Delta x' = \Delta x + h.$$

Найдем энергию системы в тот момент, когда проводник отпускают из смещенного положения. Кинетическая энергия проводника равна нулю, потенциальная энергия проводника в поле тяжести равна

$$\Pi_1 = -Mgh$$

(начало отсчета выбрано в положении равновесия). Поскольку скорость проводника равна нулю, конденсатор не заряжен. Энергия упругой деформации пружин равна

$$E_1 = 2\frac{k\Delta x'^2}{2} = k\left(\frac{Mg}{2k} + h\right)^2.$$

Полная энергия нашей системы в этот момент составляет

$$W_1 = \Pi_1 + E_1 = -Mgh + k\left(\frac{Mg}{2k} + h\right)^2.$$

Найдем теперь энергию системы, когда проводник будет проходить положение равновесия. Обозначим скорость проводника в этот момент через v. Энергия заряженного конденсатора равна

$$E_к = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{C(vlB)^2}{2}.$$

Потенциальная энергия проводника в поле тяжести равна нулю. Энергия упругой деформации пружин равна

$$E_2 = 2\frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{(Mg)^2}{4k}.$$

Кинетическая энергия проводника равна

$$K_2 = \frac{Mv^2}{2}.$$

Полная энергия системы в этот момент составляет

$$W_2 = E_к + E_2 + K_2 = \frac{C(vlB)^2}{2} + \frac{(Mg)^2}{4k} + \frac{Mv^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии, $W_1 = W_2$, или

$$-Mgh + k\left(\frac{Mg}{2k} + h\right)^2 = \frac{C(vlB)^2}{2} + \frac{(Mg)^2}{4k} + \frac{Mv^2}{2}.$$

Отсюда находим скорость проводника:

$$v = h\sqrt{\frac{2k}{Cl^2B^2 + M}}.$$

5. Найдем расстояние f от изображения источника до линзы перед смещением источника. Поскольку расстояние от источника $d < F$, то изображение будет мнимым. По формуле линзы

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

получаем

$$f = \frac{dF}{F - d} = 24 \text{ см}.$$

Так как источник смещают в вертикальной плоскости перпендикулярно главной оптической оси, линзу тоже нужно сместить в вертикальной плоскости. В этом случае сохраняются расстояния d и f. Точечный источник, его изображение и оптический центр линзы всегда лежат на одной прямой. Поэтому оптический центр линзы O' должен лежать на прямой BA' (рис.12). Следовательно, линзу нужно сместить вниз на расстояние OO'. Из подобия треугольников OBO' и ABA' найдем искомое расстояние:

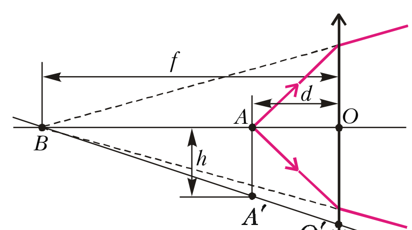

Рис. 12

$$OO' = \frac{hf}{f - d} = \frac{hF}{d} = 6 \text{ см}.$$

Вариант 2

1. 1) $a = g\left(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha\right) \approx 2{,}9\ \text{м}/\text{с}^2$;
2) $L = (3/4)\left(\mu_2 - \mu_1\right)gt^2\cos\alpha = 25$ см.

2. $Q = \Lambda/2 + 4R\Delta T$.

3. $A = \mathcal{E}\left(\dfrac{Q}{2} + \dfrac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{d}\right)$.

4. $I_m = U_1\sqrt{\dfrac{C_1C_2}{L\left(C_1 + C_2\right)}}$.

5. $x = R\dfrac{n^2}{2 + n - n^2} = 18$ см.

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\left[-6; \dfrac{3}{2}\right] \cup (3; +\infty)$.

2. $\left(\dfrac{8}{3}; 4\right)$.

3. $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $y = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

4. а) $MN = 5$; б) $LE = \dfrac{5}{4}$.

5. -2; -1; 3. *Указание.* $x = 2$ при $a = -2$. При $a \neq -2$ должны быть целыми числа

$$x_1 + x_2 = -2 + \frac{5}{a+2} \text{ и } x_1 x_2 = a - 7 + 2\frac{5}{a+2},$$

откуда $a + 2 = \pm 1; \pm 5$. Проверка показывает, что подходят только $a = -1$, $a = 3$.

Вариант 2

1. $(-\infty; -1] \cup (2; 3]$. **2.** 1.

3. $\frac{\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** а) 81; б) 1:3.

5. 0. *Указание.* Функция $f(x) = 2\cos 3x + 8|\sin x| - 7$ четная, кроме того, $f(0) f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$. Поэтому сумма корней на $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ равна 0. При $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$ функция убывает, причем $f(x) > f\left(\frac{3\pi}{4}\right) > 0$.

ФИЗИКА

1. $\Delta p = 2\sqrt{2mE}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **2.** $T = m\left(g - \frac{v^2}{8l}\right)$. **3.** $\eta = 1/18$.

4. $n = \dfrac{p_{н}}{p - \dfrac{mRT}{MV}} = 4$ (здесь $p_{н} = 100$ кПа – давление насыщенного пара при 100 °С, M = 18 г/моль – молярная масса воды).

5. $n = 3$. **6.** $x = \dfrac{3mdv^2}{2eU}$. **7.** $P_{\max} = \dfrac{(U - Ir)^2}{4r}$.

8. $F_{\min} = \dfrac{IBl}{mg}(mg - IBl) = 0{,}32$ Н.

9. $t = \dfrac{\lambda\,\mathrm{arctg}\,2}{2\pi c}$, где c – скорость света.

10. $x = H\sin\alpha$.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 3 круга. *Указание*. Если один мотоциклист впервые догоняет другого, то это значит, что он проехал на один круг больше.

2. $2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{4}{7}\right) + 2\pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$ (вторую серию решений можно записать по-другому: $\pm\arccos\frac{4}{7} + (2m+1)\pi$, $m \in \boldsymbol{Z}$); 5 решений. *Указание*. Уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

3. $(0; 1)$. *Указание*. Рассмотрите случаи $x + 1 > 1$ и $0 < x + 1 < 1$.

4. 4.

5. $2/\sqrt{3}$. *Указание*. Рассмотрите сечение AA_1C_1C.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{36\sqrt{3}} a^3\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **2.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

3. $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right]$. **4.** 110. **5.** $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}$.

Вариант 3

1. 108. *Указание.* Из равенства боковых ребер следует, что основанием высоты пирамиды является центр окружности, описанной около основания. Радиус этой окружности можно найти, например, из равенства $4RS = abc$.

2. $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Не забудьте проверить, входят ли найденные решения в ОДЗ.

3. $(3; 4{,}5) \cup (8; +\infty)$. **4.** 0; 3. **5.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Вариант 4

1. $8\sqrt{6}/3$. **2.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $(-\infty; \log_2 3)$. **4.** $1/12$.

5. 10. Этот единственный максимум есть $f(1)$.

Задачи устного экзамена

1. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$. **3.** $[-3; -1) \cup (2; 3]$.

4. $(1; +\infty)$. *Указание.* Рассмотрите случаи $l < 0$, $l = 0$, $l > 0$.

5. $-36/5$. *Указание.* Перейдите к логарифмам по одному основанию, например c, и обозначьте $\log_c b = x$.

6. –1. *Указание.* Преобразуйте произведение тригонометрических функций в сумму.

7. $-24/25$. *Указание.* Можно воспользоваться формулами, выражающими $\sin 2t$ и $\cos 2t$ через $\mathrm{tg}\,t$.

8. 22. *Указание.* Проверив, что уравнение имеет корни, выразите данное выражение через $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$.

9. –8. *Указание.* Выразите сумму кубов корней уравнения через $x_1 + x_2$ и $x_1 x_2$. Проверьте, имеет ли данное уравнение корни при найденном значении l.

10, **11**, **12.** См. рис.13, 14, 15.

13. 36. **14.** 9; $9\sqrt{6}$.

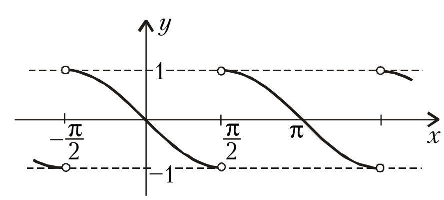

Рис. 13

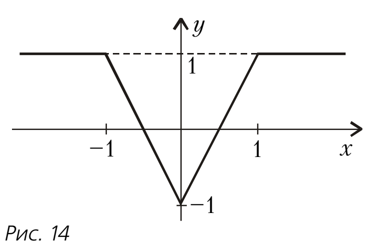

Рис. 14

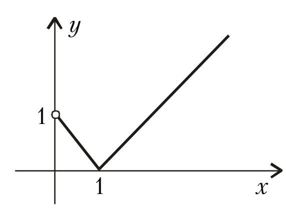

Рис. 15

ФИЗИКА

1. $x = 58{,}8$ м; $v = 19{,}6$ м/с. **2.** $v = 7{,}7 \cdot 10^3$ м/с.

3. $m = 0{,}034$ кг. **4.** $m = 0{,}2$ кг. **5.** $\alpha = 0{,}8$.

6. $U = 1{,}7$ В. **7.** $v = 1{,}9 \cdot 10^5$ м/с. **8.** $\delta = 65^\circ$.

9. $\nu = 7{,}7 \cdot 10^{15}$ Гц.

10. $E = 6{,}63 \cdot 10^{-22}$ Дж; $p = 2{,}2 \cdot 10^{-29}$ кг · м/с.