

Характерные задачи вступительных экзаменов по физике в МФТИ

В. МОЖАЕВ

ЗАДАЧА 1. ЧЕЛОВЕКУ МАССОЙ m ТРЕБУЕТСЯ ПОДТЯНУТЬ к стене ящик массой $M = 3m$ с помощью каната, перекинутого через блок. Если человек стоит на горизонтальном полу (рис. 1), то для достижения цели ему надо тянуть канат с минимальной силой $F_1 = 600$ Н. С какой минимальной силой F_2 необходимо тянуть этому человеку канат, если он упрется в ящик ногами (рис. 2)? Части каната, не соприкасающиеся с блоком, горизонтальны. Массой блока и каната пренебречь. (1998 г.)

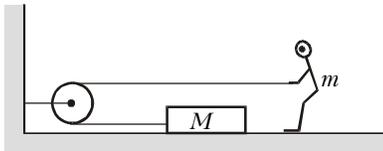


Рис. 1

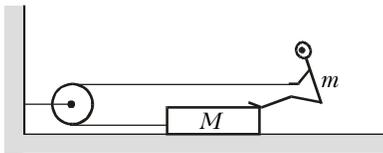


Рис. 2

В первом случае сила, с которой человек тянет канат, очевидно, приложена и к ящику. Поскольку $F_1 > 0$, заключаем, что между ящиком и полом действует сила трения скольжения. Пусть коэффициент трения скольжения между ящиком и полом равен μ . Минимальность силы натяжения каната означает, что

$$F_1 = \mu Mg.$$

Во втором случае, когда натяжение каната равно F_2 , на систему ящик – человек в горизонтальном направлении будет действовать сила, равная $2F_2$. Условие минимальности силы означает, что

$$2F_2 = \mu(M + m)g.$$

Из полученных уравнений найдем искомую силу:

$$F_2 = \frac{F_1 (M + m)}{2M} = \frac{2}{3} F_1 = 400 \text{ Н.}$$

Задача 2. Тонкая трубка, запаянная с одного конца, заполнена маслом и закреплена на горизонтальной платформе, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси так, что масло не выливается и заполняет полностью горизонтальное колено трубки (рис. 3). Открытое колено трубки вертикально. Геометрические размеры установки даны на рисунке. Атмосферное давление p_0 , плотность масла ρ . 1) Найдите давление масла на изгибе трубки. 2) Найдите давление масла у запаянного конца трубки. (1996 г.)

1) Вращение платформы не сказывается на вертикальном распределении давления масла в вертикальном колене. Поэтому давление масла в месте изгиба трубки равно

$$p_{\text{изг}} = p_0 + \rho gH.$$

2) Рассмотрим горизонтальную часть трубки, заполненную маслом. Трубка вместе с платформой вращается с угловой скоростью ω . Выберем маленький участок масла длиной dr , который находится на расстоянии r от оси вращения (рис. 4). Пусть слева от этого участка давление масла p , справа $p + dp$, а площадь сечения трубки S . Поскольку данный элемент масла вращается с угловой скоростью ω , уравнение равномерного движения по окружности радиусом r будет иметь вид

$$\rho S dr \cdot \omega^2 r = dp \cdot S.$$

Отсюда получаем

$$dp = \rho \omega^2 r dr.$$

В интегральном виде это уравнение будет выглядеть так:

$$\int_{p_A}^{p_B} dp = \int_{-L}^{2L} \rho \omega^2 r dr.$$

После интегрирования получим

$$p_B - p_A = \frac{\rho \omega^2}{2} (4L^2 - L^2),$$

или

$$p_A = p_B - \frac{3\rho \omega^2 L^2}{2} = p_0 + \rho gH - \frac{3\rho \omega^2 L^2}{2}.$$

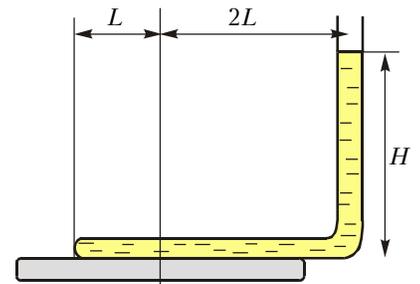


Рис. 3

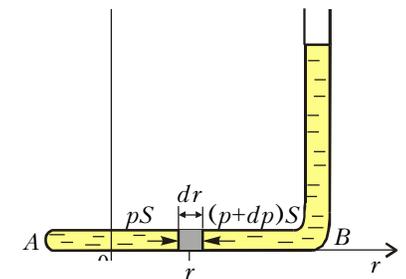


Рис. 4

Задача 3. Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа CO_2 , масса которого по некоторым оценкам составляет $M = 6 \cdot 10^{16}$ т. Чему равна плотность углекислого газа вблизи поверхности Венеры, если его температура $T = 800$ К? Радиус Венеры $R_B = 6300$ км, а ускорение свободного падения $g_B = 8,2$ м/с². Толщина атмосферы Венеры много меньше радиуса планеты. (1997 г.)

Поскольку толщина атмосферы Венеры много меньше ее радиуса, можно считать, что давление углекислого газа на поверхности планеты равно весу углекислого газа атмосферы Венеры, деленному на площадь ее поверхности:

$$p_0 = \frac{Mg_B}{4\pi R_B^2}.$$

Из уравнения состояния идеального газа можно найти плотность CO_2 :

$$\rho = \frac{Mp_0}{RT},$$

где $M = 44$ г/моль – молярная масса углекислого газа, а $R = 8,3$ Дж/(моль · К) – универсальная газовая постоянная. С учетом предыдущего выражения для p_0 , получим

$$\rho = \frac{MMg_B}{4\pi R_B^2 RT} = 6,54 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 4. Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС \mathcal{E} , резистора сопротивлением R , катушки переменной индуктивности, начальное значение которой L_0 , и ключа K (рис.5).

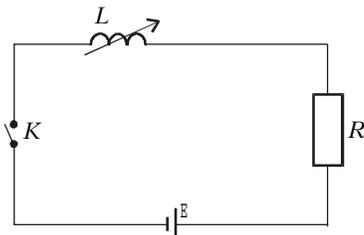


Рис. 5

Через некоторое время после замыкания ключа ЭДС индукции в катушке оказалась равной U_0 . Начиная с этого момента индуктивность катушки изменяют таким образом, что ЭДС в катушке остается неизменной по знаку и по величине и равной U_0 .

1) Определите ЭДС индукции в катушке сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость индуктивности катушки от времени после начала изменения индуктивности. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. (1997 г.)

1) Сразу после замыкания ключа ток в цепи равен нулю. При этом ЭДС индукции в катушке \mathcal{E}_{i0} будет равна ЭДС батареи, взятой с противоположным знаком. Это следует из закона Ома для замкнутой цепи: $\mathcal{E} + \mathcal{E}_{i0} = 0$, откуда

$$\mathcal{E}_{i0} = -\mathcal{E}.$$

2) Пусть в некоторый момент времени ЭДС индукции равна U_0 и «направлена» навстречу ЭДС батареи. Начиная с этого момента ЭДС индукции остается неизменной, следовательно, в соответствии с законом Ома в цепи будет течь постоянный ток:

$$\mathcal{E} - U_0 = I_0 R, \text{ откуда } I_0 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} = \text{const}.$$

Поскольку ЭДС индукции равна $\frac{d(LI)}{dt}$, а ток $I = \text{const} = I_0$, получаем

$$U_0 = \frac{(\mathcal{E} - U_0)}{R} \frac{dL}{dt}.$$

Разделим переменные:

$$dL = \frac{U_0 R}{\mathcal{E} - U_0} dt,$$

проинтегрируем:

$$\int_{L_0}^L dL = \frac{U_0 R}{\mathcal{E} - U_0} \int_0^t dt$$

и найдем зависимость индуктивности катушки от времени:

$$L = L_0 + \frac{U_0 R t}{\mathcal{E} - U_0}.$$

Задача 5. На двух длинных, гладких, параллельных, горизонтальных и проводящих штангах лежит проводящая перемычка Π массой M (рис.6). Расстояние между штангами l . Через резистор сопротивлением R и разомкнутый ключ K к штангам подключена батарея с постоянной ЭДС.

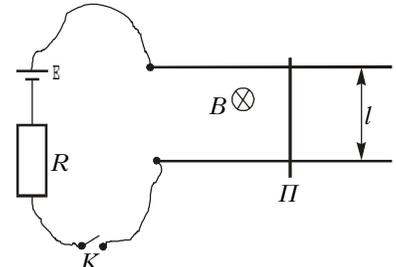


Рис. 6

Штанги расположены в области однородного магнитного поля с индукцией, равной B и направленной от нас перпендикулярно плоскости рисунка. После замыкания ключа в установившемся режиме перемычка достигает скорости v_0 . Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением штанг и перемычки, определите ускорение перемычки сразу после замыкания ключа. (1997 г.)

Сначала найдем ЭДС батареи \mathcal{E} . Это можно сделать, зная величину установившейся скорости перемычки.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа. По перемычке течет ток I и со стороны магнитного поля на нее действует сила Ампера, равная $F = BIl$ и направленная вправо.

Выберем неподвижную систему координат, в которой будем рассматривать движение перемычки (рис.7). Перемычка движется вдоль оси x . Уравнение движения имеет вид

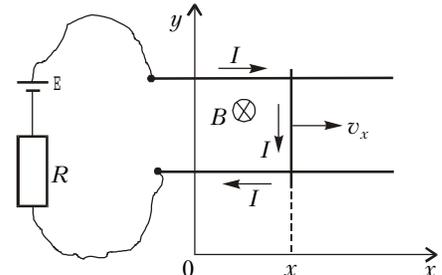


Рис. 7

$$Ma = F, \text{ или } Mv'_x = BIl.$$

Запишем теперь закон Ома для замкнутого контура:

$$\mathcal{E} - Blv_x = IR.$$

Подставляя выражение для тока из этого равенства в предыдущее, получим

$$Mv'_x = \frac{(\mathcal{E} - Blv_x)}{R} Bl,$$

или, после арифметических преобразований,

$$v'_x + \frac{(Bl)^2}{MR} v_x = \frac{\mathcal{E}Bl}{MR}.$$

Это уравнение описывает зависимость скорости v_x перемычки

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 30)

ки от времени. Очевидно, что скорость перемычки достигнет постоянного значения, когда ускорение станет равным нулю. Итак, при $v'_x = 0$ $v_x = v_0$ и, следовательно,

$$E = Blv_0.$$

Теперь мы можем ответить на поставленный в задаче вопрос. Сразу после замыкания ключа в цепи течет ток

$$I_1 = \frac{E}{R} = \frac{Blv_0}{R}.$$

На перемычку действует сила Ампера, равная

$$F_1 = BI_1l = \frac{(Bl)^2 v_0}{R}.$$

Поэтому ускорение перемычки в начальный момент равно

$$a_1 = \frac{F_1}{M} = \frac{(Bl)^2 v_0}{MR}.$$

Задача 6. Если рассматривать свое изображение в плоскопараллельной стеклянной пластинке толщиной $H = 10$ см, то можно увидеть ряд последовательных изображений лица, отстоящих друг от друга на $L = 14$ см. Чему равен показатель преломления стекла пластинки? (1999 г.)

Пусть точка A является объектом, принадлежащим нашему лицу. Проведем произвольно луч света от точки A под

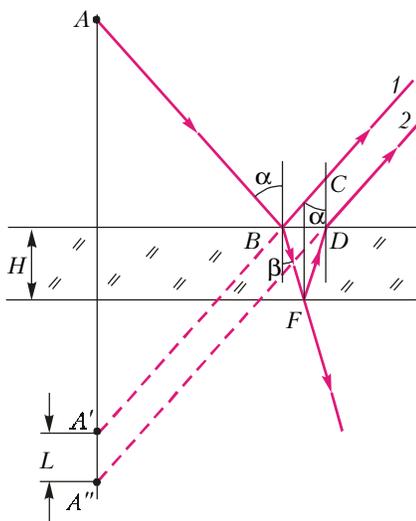


Рис. 8

малым углом падения α на верхнюю поверхность пластинки (рис.8). Луч частично отразится в точке B (луч 1), частично испытает преломление под углом β , а затем, частично отразившись от нижней поверхности пластинки в точке F , снова направится к верхней поверхности пластинки. Здесь он, частично отразившись в точке D , выходит в виде преломленного луча (луч 2). Таким образом будут происходить многократные отражения и преломления.

Продолжения лучей 1 и 2 дают два первых мнимых изображения точки A – точки A' и A'' , отстоящие друг от друга на L . Очевидно, что и все последующие мнимые изображения точки A тоже будут располагаться на одинаковых расстояниях L друг от друга.

Из треугольника BFD найдем длину отрезка BD :

$$BD = 2H \operatorname{tg} \beta,$$

а из треугольника BCD найдем расстояние L между изображениями, равное длине отрезка CD :

$$L = CD = BD \operatorname{ctg} \alpha = 2H \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \approx 2H \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{2H}{n}.$$

Отсюда получаем

$$n = \frac{2H}{L} = 1,43.$$

Задача 7. Маленький грузик массой m на пружине жесткостью k (рис.9) совершает гармонические колебания от-

носительно главной оптической оси тонкой плосковыгнутой линзы с фокусным расстоянием $-F$ ($F > 0$). Линза плотно прижата к вертикально расположенному плоскому зеркалу. Расстояние $L = 4,5F$. 1) На каком расстоянии от зеркала находится изображение грузика в данной оптической системе? 2) С какой скоростью изображение грузика в системе линза – зеркало пересекает главную оптическую ось линзы, если амплитуда колебаний груза равна A ? (1998 г.)

1) На рисунке 9 изображен ход лучей, когда груз – точка B – находится на максимальном расстоянии A от главной оптической оси системы $O'O''$. Изображение грузика после

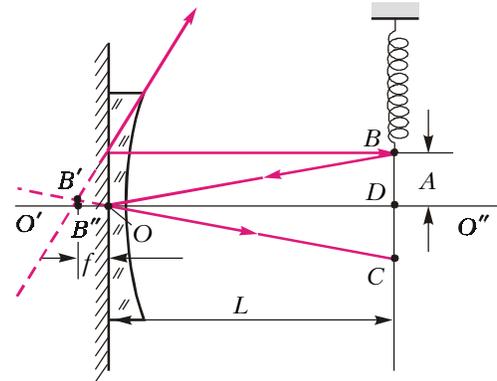


Рис. 9

двойного прохождения лучами линзы и зеркального отражения от плоского зеркала получается в точке B' на расстоянии f от оптического центра системы. Из формулы линзы

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{f} = -\frac{2}{F},$$

где двойка в правой части означает двойное прохождение лучами линзы, найдем

$$f = -\frac{LF}{2L + F} = -0,45F.$$

Знак «минус» говорит о том, что изображение мнимое.

2) На нашем рисунке расстояние от грузика до главной оптической оси равно A , а расстояние от изображения (точка B') до оси равно $B'B''$ (точка $B'' \in O'O''$). Из подобия треугольников $B'OB''$ и DOC (O – оптический центр линзы) следует, что

$$\frac{A}{B'B''} = \frac{L}{f} = \frac{2L + F}{F}.$$

Это соотношение для расстояний до оси грузика и его изображения, очевидно, справедливо и для произвольного

момента, когда расстояние грузика до оси равно $A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$,

где $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ – циклическая частота колебаний. Расстояние от изображения до оси обозначим через y ($y = B'B''$). Тогда получим

$$\frac{A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t}{y} = \frac{2L + F}{F} = 10, \text{ и } y = \frac{A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t}{10}.$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$y' = -\frac{A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t}{10}.$$

Грузик будет пересекать главную оптическую ось в те моменты, когда

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t = \frac{\pi}{2} + \pi N = \frac{(2N+1)\pi}{2}, \text{ где } N = 0, 1, 2, \dots$$

В эти моменты

$$\sin \sqrt{\frac{k}{m}} t_N = (-1)^N,$$

и скорость пересечения изображением главной оптической оси равна

$$y'_N = v_N = (-1)^{N+1} \frac{A\sqrt{\frac{k}{m}}}{10} = (-0,1)^{N+1} A\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Отрицательный знак означает, что скорость шарика направлена вниз.

Упражнения

1. Человек массой m , упираясь ногами в ящик массой M , подтягивает его с помощью каната, перекинутого через блок, по наклонной плоскости с углом наклона α (рис.10). С какой минимальной силой надо тянуть канат человеку, чтобы подтянуть ящик к блоку? Коэффициент трения скольжения между ящиком и наклонной плоскостью μ . Части каната, не соприкасающи-

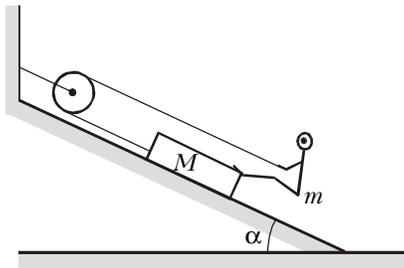


Рис. 10

ся с блоком, параллельны наклонной плоскости. Массой блока и каната пренебречь. (1998 г.)

2. Найдите массу кислорода, содержащегося в атмосфере Земли. Известно, что температура воздуха вблизи поверхности Земли $T = 290 \text{ К}$, радиус Земли $R_3 = 6370 \text{ км}$, а ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$. Масса кислорода, содержащегося в одном литре воздуха, взятого у поверхности Земли, равна $\rho = 0,26 \text{ г/л}$. Процентное содержание кислорода (по массе) в атмосфере Земли считать постоянным. Толщина атмосферы много меньше радиуса планеты. (1997 г.)

3. Проволочный контур в виде квадрата со стороной a и общим омическим сопротивлением R расположен на горизонтальной поверхности стола (рис. 11).

Часть контура находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B_0 и перпендикулярной плоскости контура. Контур неподвижен и входит в область однородного поля на глубину b . После выключения магнитного поля контур приобретает некоторый импульс. Определите величину и направление этого импульса, полагая, что за время спада магнитного поля смещение контура пренебрежимо мало. Самоиндукцией контура пренебречь. (1999 г.)

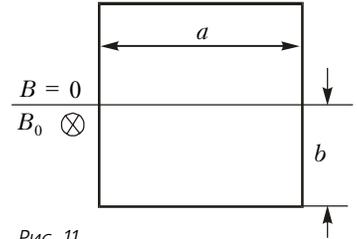


Рис. 11

4. С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране, расположенном на расстоянии $L = 4,9F$ от циферблата ручных часов, получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой $R = 1,5 \text{ см}$. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения конца изображения стрелки на экране? (1997 г.)