Свойства и признаки окружности

Хорошо известно определение окружности как геометрического места точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки

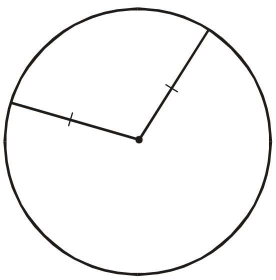

Рис. 1

(рис.1). 0днако определить окружность «м5жно и многими другими способами. Приведем несколько примеров.

1. Окружность есть геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до нескольких заданных точек постоянна.

2. Окружность есть геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек *A* и *B* постоянно и не равно 1 (рис.2). Такая окружность называ-

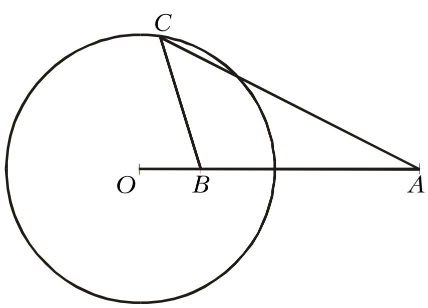

Рис. 2

ется *окружностью Аполлония* точек *A* и *B*.

Окружность обладает многими красивыми свойствами, доказательство которых не представляет труда. Сложнее определить, являются ли эти свойства также и признаками окружности, т.е. существуют ли другие кривые, обладающие ими. Перечислим сначала некоторые из свойств окружности, не присущие никаким другим кривым.

1. Два угла с вершинами на окружности, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис.3).

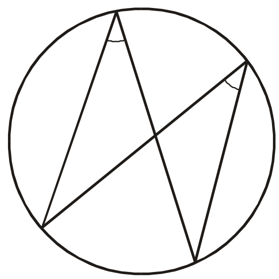

Рис. 3

2. Касательные к окружности, проведенные из одной точки, равны (рис.4).

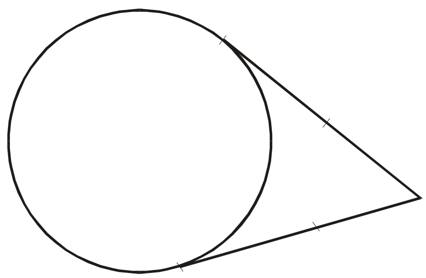

Рис. 4

3. Из всех замкнутых кривых данной длины окружность ограничивает область максимальной площади.

4. Из всех замкнутых кривых, для которых длины всех хорд не превосходят заданной величины, окружность ограничивает область максимальной площади.

5. Любые две дуги окружности равной длины можно совместить. Это свойство называется *самоконгруэнтностью.* На плоскости им, кроме окружности, обладает только прямая. Если кривая может не лежать в плоскости, оно задает также винтовую линию (рис.5). Однако замкнутых самоконгруэнтных кривых, отличных от окружности, не существует. Благодаря этому свойству меч, имеющий форму

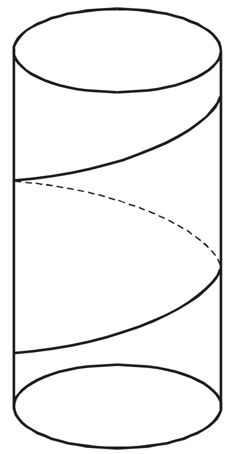

Рис. 5

дуги окружности, можно вставлять и вынимать из ножен той же формы.

6. При любом расположении двух равных окружностей на плоскости они имеют не больше двух общих точек (рис.6).

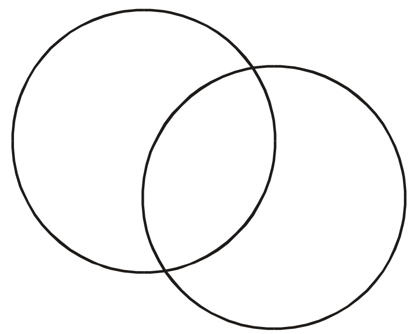

Рис. 6

7. Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии (рис.7).

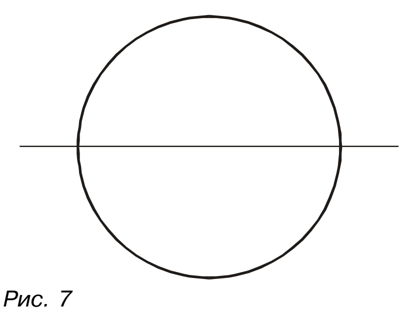

Рис. 7

Для некоторых из перечисленных свойств доказательства того, что они определяют окружность, совсем элементарны. Для других, напротив, весьма сложны. Наиболее интересны доказательства признаков 2 и 6.(Попробуйте найти их самостоятельно; если не получится — см. ниже.)

А теперь приведем несколько красивых свойств окружности, которыми обладают и другие кривые.

1. Окружность является *кривой постоянной ширины.* Это значит, что если провести к окружности две параллельные касательные, то расстояние между ними не зависит от их направления (рис.8). Как ни странно, этим свойством обладают многие кривые, в том числе довольно сильно отличающиеся от окружности. Наиболее простая из них, так называемый *треугольник Рело*, изображена на рисунке 9. Он состоит из трех дуг окружностей, центры которых расположены в вершинах правильного треугольника, а радиусы равны его стороне. Если изготовить несколько катков, поперечные сечения которых являются кривыми постоянной ширины, то можно перевозить на них плоскую платформу, и она не будет перемещаться вверх и вниз (рис.10). Отметим также, что все кривые данной постоянной ширины имеют одну и ту же длину.

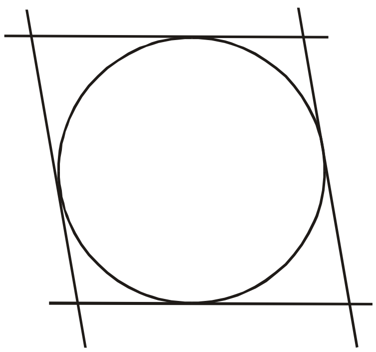

Рис. 8

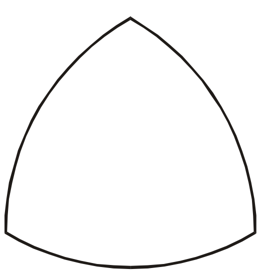

Рис. 9

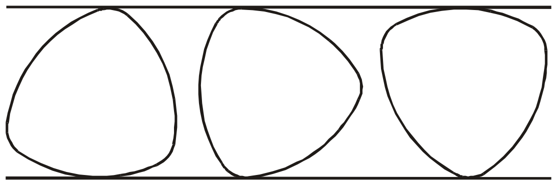

Рис. 10

2. Любая прямая, которая делит пополам периметр окружности, делит пополам и площадь ограниченного ей круга. Разумеется, помимо окружности этим свойством обладают любые кривые, имеющие центр симметрии. Гораздо интереснее то, что обладать им могут и несимметричные кривые, в том числе и выпуклые. Одна из них изображена на рисунке 11. Ее можно задать следующими уравнениями:

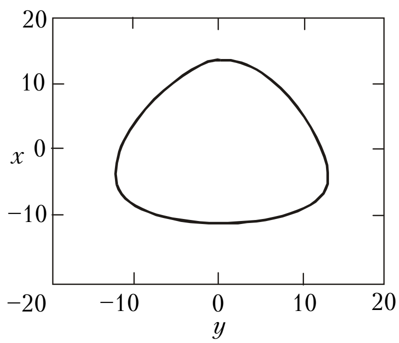

Рис. 11

$$x = 12\cos\varphi + \cos 2\varphi + 1/2\cos 4\varphi,$$

$$y = 12\sin\varphi - \sin 2\varphi + 1/2\sin 4\varphi,$$

где φ меняется от 0 до 2π.

Доказательства признаков 2 и 6.

2. Пусть дана выпуклая гладкая кривая, касательные к которой из любой точки равны. Возьмем произвольную точку A вне кривой и проведем касательные AB' и AC'.

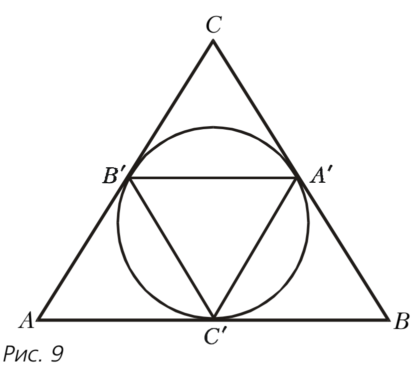

Рис. 9

Докажем, что для всех точек A', лежащих на дуге $B'C'$ (одной и той же), углы $B'A'C'$ совпадают.

Проведем через A' касательную к кривой и найдем точки B и C ее пересечения с AC' и AB' (рис.12). По условию треугольники $B'A'C'$ и $C'A'B'$ равнобедренные, следовательно:

$$\angle BA'C' = \frac{\pi - \angle CBA}{2},$$

$$\angle CA'B' = \frac{\pi - \angle ACB}{2}$$

$$\angle C'A'B' = \pi - \angle BA'C' - \angle CA'B' =$$

$$= \frac{\angle CBA + \angle BCA}{2} = \frac{\pi - \angle BAC}{2}.$$

Таким образом угол, под которым видна хорда $B'C'$, не зависит от выбора точки на дуге. Для второй дуги доказательство аналогично. По признаку 1 кривая является окружностью.

6. Прежде всего отметим, что в любую замкнутую кривую можно вписать правильный треугольник. Действительно, возьмем на кривой произвольную точку A и повернем кривую вокруг A на $\pi/3$. Точка пересечения старого и нового положения кривой, отличная от A будет второй вершиной треугольника.

Итак пусть правильный треугольник с центром O вписан в нашу кривую. Повернем ее вокруг O на угол $2\pi/3$. Старое и новое положение кривой пересекаются, по крайней мере, в трех точках (вершинах треугольника) и, значит, совпадают, т.е. O является центром симметрии 3 порядка. Рассмотрим теперь поворот кривой вокруг O на произвольный угол ϕ. Если старое и новое положение кривой не совпадают, то число точек их пересечения кратно 3 (в силу симметрии) и не равно 0 (иначе одна кривая лежала бы целиком внутри другой, что для конгруэнтных кривых невозможно). Следовательно, кривая переходит в себя при любом повороте вокруг O, т.е. является окружностью.

А.Заславский