Три теоремы о выпуклых многогранниках

Н.ДОЛБИЛИН

Теорема Коши

Огюстена Луи Коши (1789–1857) «по его блестящим достижениям во всех областях математики можно поставить почти рядом с Гауссом». Эта оценка, данная французскому математику немецким математиком Феликсом Клейном, очень весома, особенно если учесть, что взаимоотношения между французскими и немецкими математиками развивались в атмосфере острой конкуренции и признание заслуг соперников никогда не отличалось щедростью. Гигантское научное наследие Коши занимает 25 внушительных томов и включает около 800 работ. Работы, принесшие Коши славу великого математика, относятся в основном к математическому анализу, алгебре, математической физике, механике. Его исследования по геометрии могли бы остаться незамеченными, если бы не работа «О многоугольниках и многогранниках», опубликованная в «Журнале Политехнической школы» в 1813 году. В этой работе недавний выпускник знаменитой Политехнической школы доказал замечательную теорему о выпуклых многогранниках.

Аккуратное определение многогранника дано в первой части статьи. Здесь мы вспомним, что два многогранника *равны*, или *конгруэнтны*, если их можно совместить движением, а также, что многогранник называется *выпуклым*, если плоскость, проходящая через любую его грань, оставляет все остальные грани многогранника по одну сторону.

Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данными гранями. *Два выпуклых многогранника с попарно равными гранями, составленными в одном и том же порядке, равны.*

Рассмотрим три многогранника (рис.1). Все они состоят из попарно равных граней. Но если первые два многогранника составлены из попарно равных граней, примыкающих друг к другу в одном и том же порядке, то третий многогранник составлен из тех же граней, но примыкающих друг к другу иначе.

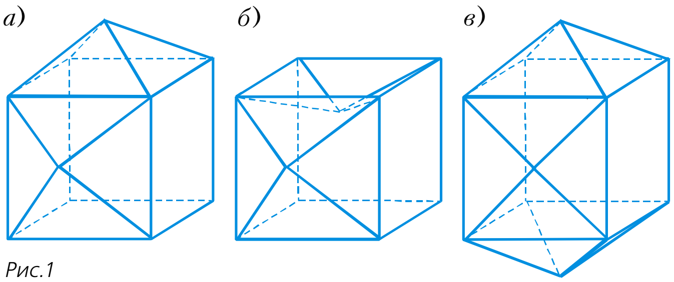

Рис.1

Иллюстрация В.Хлебниковой

То, что одинаково составленные многогранники не равны друг другу, нас не должно смущать: ведь один из многогранников (1,*б*) невыпуклый, а, как доказал Коши, в классе выпуклых многогранников подобная ситуация невозможна.

Теорема Коши, в частности, объясняет, почему модель выпуклого многогранника, склеенная из картона, не деформируется, или, как еще говорят, неизгибаема. Многогранник, который может непрерывно деформироваться так, что его грани остаются плоскими и равными самим себе и меняются лишь его двугранные углы, называется *изгибаемым*. Если же такой непрерывной деформации не существует, то многогранник *неизгибаем*.

Допустим, что выпуклый многогранник M изгибаем. Тогда существует другой, не равный ему многогранник M', двугранные углы которого мало отличаются от соответственных углов в многограннике M. Если отличие углов достаточно маленькое, то многогранник M' также выпуклый. А так как соответственные грани этих многогранников равны, то, по теореме Коши, и сами многогранники конгруэнтны. Мы пришли к противоречию с предположением о том, что многогранник M изгибаем.

Для доказательства этой теоремы Коши предложил новый метод, который, по словам А.Д.Александрова, «представляет собой одно из прекраснейших рассуждений, какие только знает геометрия».

Идея доказательства теоремы Коши

Доказательство теоремы Коши о единственности выпуклого многогранника основано на двух леммах. Одна из них весьма неожиданная. Рассмотрим выпуклый многогранник. Отметим некоторые его ребра знаком «+» или «−», а остальные ребра оставим «нейтральными». Выберем какую-нибудь вершину v и, начиная с любого подходящего к ней ребра, последовательно обойдем все ребра, сходящиеся в v, и вернемся к исходному ребру. Если в процессе обхода после очередного ребра с одним знаком следует ребро с противоположным, то мы говорим, что происходит *перемена знака*. Нейтральные ребра, которые могут находиться между отмеченными ребрами, при этом не учитываются. Обозначим через $N(v)$ общее число перемен знака при обходе вершины v. Например, для вершины v, изображенной на рисунке 2,*а*, число пере-

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №5

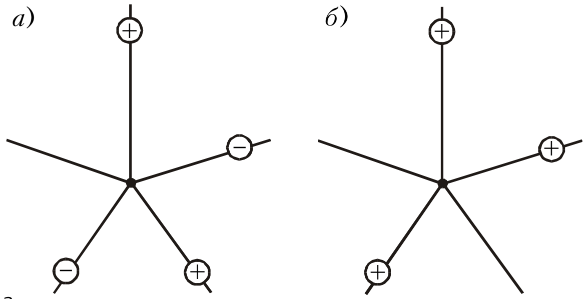

Рис.2

мен знака равно четырем, а на рисунке 2,*б* – нулю. Очевидно, что число перемен знака должно быть четным. В частности, оно равно нулю, если к вершине не подходит ни одного ребра со знаком или наряду с нейтральными подходят лишь ребра одного знака.

Лемма 1 (О.Коши). *Пусть на замкнутом выпуклом многограннике некоторые ребра отмечены знаком «+» или «–». Выделим все те вершины многогранника, к которым подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда среди выделенных вершин всегда найдется такая вершина, при обходе вокруг которой встретится менее четырех перемен знака.*

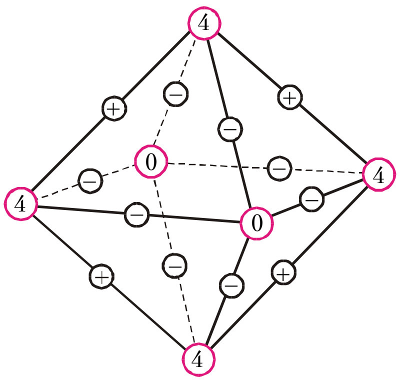

Рис.3

Например, в приведенной на рисунке 3 расстановке знаков на ребрах октаэдра четыре вершины имеют 4 перемены знака и две вершины не имеют ни одной перемены знака.

Во второй лемме речь идет о выпуклых многоугольниках на плоскости или на сфере. Скажем несколько слов о том, что такое сферический многоугольник. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – совокупность точек на сфере. Замкнутая ломаная, состоящая из n дуг больших окружностей $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, образует *сферический многоугольник*. Дуги являются сторонами многоугольника, а *углом* сферического многоугольника является угол между касательными, проведенными к смежным сторонам в их общей вершине. Сферический многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой большой окружности, содержащей его сторону. Если мы возьмем выпуклый многогранный угол с вершиной в центре сферы, то он вырезает на этой сфере выпуклый сферический многоугольник. Сторонами этого многоугольника являются дуги, по которым грани многогранного угла пересекаются со сферой.

Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ – выпуклые n-угольники, причем $A_1A_2 = B_1B_2, \ldots, A_{n-1}A_n = B_{n-1}B_n$. Припишем каждой вершине A_i первого многоугольника знак «+» или «–» в зависимости от того, больше или меньше угол A_i угла B_i. Если $\angle A_i = \angle B_i$, то вершина A_i остается нейтральной.

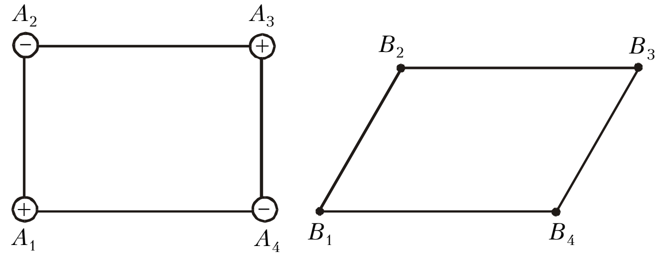

Рис.4

Возьмем, например, прямоугольник и параллелограмм с соответственно равными сторонами (рис.4). Подсчитаем число перемен знака при обходе всех вершин. Оно равно четырем.

Лемма 2 (О.Коши). *Пусть у двух выпуклых n-угольников на плоскости (или на сфере) соответственные стороны попарно равны, а среди соответственных углов имеются попарно неравные. Отметим знаком «+» (или «–») вершины тех углов одного многоугольника, которые строго больше (или меньше) соответствующих углов другого. Тогда при обходе вершин первого многоугольника число перемен знака не меньше четырех.*

Заметим, что если из двух многоугольников с соответственно равными сторонами хотя бы один невыпуклый, то лемма неверна.

Из леммы 2 вытекает важное для доказательства теоремы Коши

Следствие. *Пусть два выпуклых многогранных угла с одинаковым числом граней имеют соответственно равные плоские углы. Припишем каждому ребру одного из многогранных углов знак «+» (или «–») в зависимости от того, больше (или меньше) двугранный угол при нем соответствующего двугранного угла другого многогранного угла. Тогда число перемен знака при обходе ребер этого многогранного угла не меньше четырех.*

Действительно, опишем из вершин многогранных углов как из центров сферы одного и того же радиуса. Грани выпуклых многогранных углов вырезают на сферах выпуклые многоугольники. Так как соответственные плоские углы многогранных углов равны, равны также и соответственные стороны сферических многоугольников. Углы многоугольников равны двугранным углам многогранных углов. Поэтому знаки на ребрах первого многогранного угла совпадают со знаками в вершинах первого многоугольника. Отсюда, по лемме 2, вытекает следствие.

Из леммы 1 и леммы 2 (точнее, из следствия) легко получить доказательство теоремы Коши. Предположим, что многогранники M и M', хотя и составлены из попарно равных граней, взятых в одинаковом порядке, тем не менее не конгруэнтны друг другу. Это возможно, лишь когда при некоторых соответственных ребрах этих многогранников имеются *неравные* двугранные углы. Расставим на ребрах многогранника M знаки «+» или «–» в зависимости от того, больше или меньше двугранный угол при данном ребре двугранного угла при соответствующем ребре другого многогранника.

При этом соответственные ребра, двугранные углы при которых равны, не получают никакого знака (остаются нейтральными).

Выберем любую вершину v многогранника M, к которой подходит хотя бы одно ребро со знаком. Рассмотрим многогранный угол многогранника M с вершиной v. По следствию из леммы 2, число перемен знака при обходе v не меньше четырех. С другой стороны, по лемме 1, среди таких вершин должна быть хотя бы одна, при обходе вокруг которой число перемен знака не больше двух. Полученное противоречие доказывает теорему Коши.

Отметим, что теорема Коши позволяет ослабить определение правильных многогранников. Напомним, что *правильным* многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани суть равные правильные многоугольники и двугранные углы попарно равны.

Упражнение 1. Докажите, что выпуклый многогранник, все грани которого равные правильные многоугольники, является правильным многогранником тогда и только тогда, когда в каждой вершине сходится одинаковое число граней. (*Указание.* Очевидно, что у правильного многогранника во всех вершинах сходится одинаковое число граней. Для доказательства в обратную сторону нужно воспользоваться сначала теоремой Эйлера, а затем теоремой Коши.)

Гипотеза Эйлера и изгибаемые многогранники

Вопрос – однозначно ли задается форма многогранной поверхности своими гранями или она может меняться за счет изменения двугранных углов, давно интересовал математиков. В 1776 году великий Эйлер высказал гипотезу: «Замкнутая пространственная фигура не допускает изменений, пока не рвется». Под «замкнутой пространственной фигурой» понималось то, что сейчас принято называть замкнутой поверхностью. Тем самым предположение Эйлера относилось не только к многогранным поверхностям. Теорема Коши подтвердила гипотезу Эйлера в случае выпуклых многогранников. На протяжении двух веков геометры верили, что не только выпуклый, но и невыпуклый многогранник тоже неизгибаем. Хотя первые сомнения зародились в конце XIX века после того, как в 1897 году французский математик Брикар нашел первые контрпримеры к гипотезе Эйлера. Правда, эти изгибаемые многогранники, так называемые октаэдры Брикара, – не совсем обычные многогранники: они самопересекаются.

Идея Брикара очень остроумна. Возьмем в пространстве четырехугольник $ABCD$ с попарно равными противоположными сторонами: $AB = CD$, $BC = AD$. Если $ABCD$ лежит в плоскости, то это – знакомый нам параллелограмм. Пусть $ABCD$ – пространственный четырехугольник, т.е. вершины A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Его диагонали AC и BD лежат на скрещивающихся прямых. Проведем через середины O_1 и O_2 диагоналей прямую l (рис.5). Так как в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны, то прямая l, как нетрудно показать, перпендикулярна обеим диагоналям.

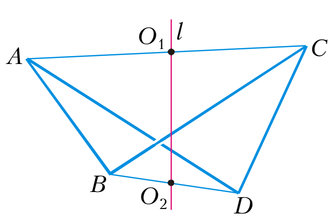

Рис.5

Упражнение 2. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей пространственного четырехугольника с попарно равными противоположными сторонами, перпендикулярна обеим диагоналям.

В силу этой перпендикулярности при повороте вокруг прямой l на 180° вершины A и C, а также B и D меняются местами и, следовательно, четырехугольник $ABCD$ переходит в себя. Заметим, что в предельном случае, когда многоугольник становится плоским параллелограммом, точки O_1 и O_2 сливаются в одну точку, а прямая l переходит в прямую, проходящую через точку пересечения диагоналей параллелограмма перпендикулярно его плоскости.

Возьмем вне прямой l какую-нибудь точку S и построим четыре треугольника SAB, SBC, SCD и SDA (рис.6,*а*). Эти треугольники (точнее, их плоскости) образуют четырехгранный угол. Из школьного курса геометрии известно, что плоские углы трехгранного угла задают его двугранные углы, а следовательно, и весь трехгранный угол однозначно. Однако если число граней у многогранного угла больше трех, то такой однозначности нет. Очевидно, что четырехгранный угол $SABCD$ при фиксированных плоских углах допускает непрерывную деформацию (изгибание). При таком изгибании четырехугольник $ABCD$ деформируется в четырехугольник с соответственно такими же сторонами и соответствующей осью симметрии.

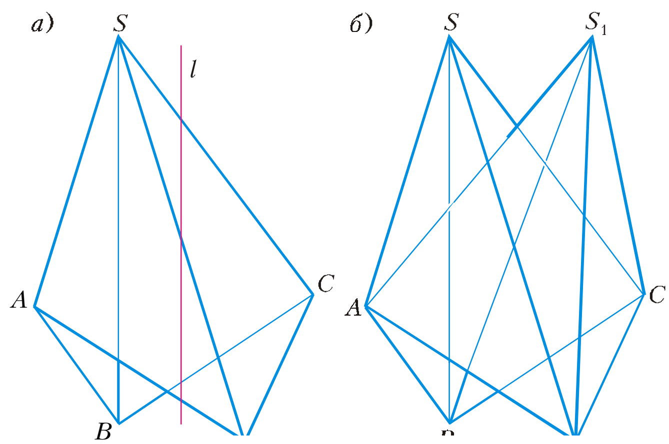

Рис.6

При повороте вокруг оси l на 180° четырехгранный угол $SABCD$ переходит в конгруэнтный угол S_1CDAB (рис.6,*б*). Совокупность 8 треугольников удовлетворяет всем трем условиям в определении многогранника. Правда, некоторые грани этого многогранника пересекают друг друга. Этот самопересекающийся многогранник и есть *октаэдр Брикара*.

Почему октаэдр Брикара изгибаем? Половинка октаэдра, очевидно, изгибается. Вторая половинка получается из первой поворотом вокруг оси l, и, следовательно, ее деформация в точности повторяет деформацию

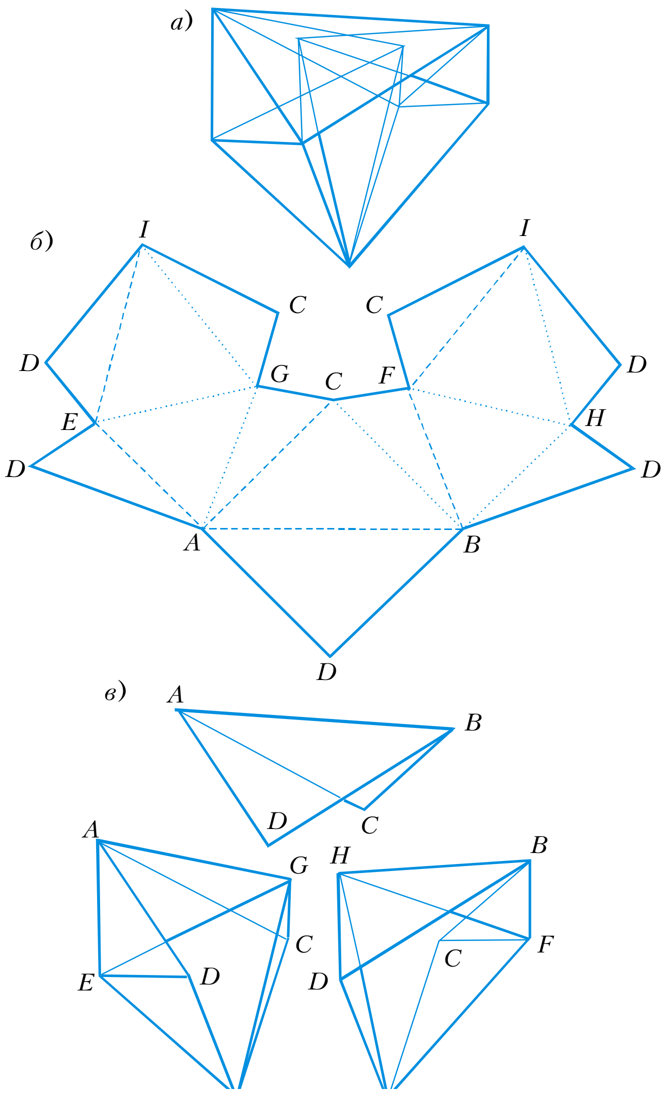

Рис.7

первой половинки. Значит, и весь октаэдр Брикара изгибаем. [1]

В 1970-е годы выяснилось, что Эйлер в своем предположении был «почти» прав… и не прав. Почти прав потому, что, как было установлено в 1975 году, «почти все» (т.е. в некотором смысле подавляющее большинство) многогранники неизгибаемы. Однако «почти все» – это еще не все многогранники. Два года спустя, в 1977 году, американский геометр Р.Коннэлли построил первые примеры изгибаемых самонепересекающихся многогранников и тем самым опроверг гипотезу Эйлера. Коннэлли назвал такие многогранники *флексорами* [2]. Затем были построены другие представители изгибаемого меньшинства. На рисунке 7,*а* изображен флексор с 9 вершинами, построенный в 1979 году геометром К.Штеффеном. Возможно, что 9 – это наименьшее число вершин, которое может быть у флексоров. Развертка флексора Штеффена показана на рисунке 7,*б*. Разный вид пунктирных линий на развертке означает, что грани перегибаются вдоль этих линий в противоположные стороны. На рисунке 7,*в* показана схема сборки многогранника Штеффена.

Гипотеза кузнечных мехов и теорема Сабитова

Не исключено, что открытие изгибаемых многогранников кому-то покажется не очень удивительным, особенно если он вспомнит о мехах музыкальных инструментов, например баяна. Но это – неверная ассоциация. Мехи баяна «работают» из-за некоторой эластичности и сминаемости материала, из которого они изготовлены. Если бы мехи баяна были собраны из твердых пластин, соединенных между собой петлями, то сыграть на таком инструменте не удалось бы. Такие мехи, как нетрудно понять, нельзя было бы ни сжать, ни растянуть (рис.8).

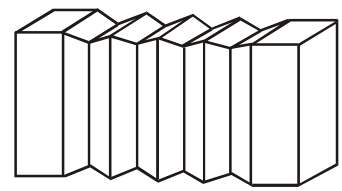

Рис.8

Впрочем, было замечено, что все флексоры, которые удалось открыть, тоже непригодны для мехов, но совершенно по другой причине. Несмотря на то что при изгибании флексор меняет свою форму, для всех построенных флексоров было замечено, что заключенный в многограннике объем при изгибании остается постоянным, т.е. изгибаемый многогранник «не дышит». Возникла *гипотеза кузнечных мехов* о том, что это всегда так – для всякого флексора его объем не изменяется при изгибании.

Содержательная проблема хороша тем, что попытки решить ее приводят к появлению новых методов и теорем, которые иногда более интересны, чем породившая их проблема. Так произошло и в этом случае, когда раздумья над гипотезой о кузнечных мехах привели российского математика Иджада Хаковича Сабитова в 1996 году к открытию неожиданной теоремы. Чтобы лучше понять ее смысл, вспомним формулу Герона. Она выражает площадь треугольника *лишь* через его стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Для многоугольников с бóльшим числом сторон формулы, выражающей площадь лишь через стороны, нет, поскольку стороны сами по себе, если не заданы углы, не определяют ни форму, ни площадь многоугольника. Например, площадь ромба со стороной a может быть любой между 0 и a^2.

Для многогранников картина принципиально иная. Предположим сначала, что все грани многогранника – треугольники. В этом случае длины его ребер одно-

[1] *Так как октаэдр Брикара самопересекается, то склеить его из бумаги невозможно. Однако легко сконструировать его реберную модель из тонких пластиковых трубочек для питья, нанизав их соответствующим образом на нитки.*

[2] *От английского слова flex – изгибать.*

значно определяют форму треугольных граней. Поэтому, если многогранник выпуклый, то, по теореме Коши, длины ребер однозначно определяют форму многогранника, а следовательно, и его объем. Сама же зависимость величины объема от длин ребер была неизвестна. Факт существования изгибаемых многогранников указывает на то, что длины ребер форму многогранника, вообще говоря, не задают.

Теорема Сабитова устанавливает связь между длинами ребер многогранника (с треугольными гранями) и его объемом. Пусть дан многогранник, тогда можно построить специальный многочлен

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ которого выражаются при помощи четырех арифметических действий через длины ребер $l_1, \ldots, l_p$ многогранника. Заметим, что то, как коэффициенты многочлена выражаются через длины ребер, зависит собственно не от длин ребер и величин углов многогранника, а от его комбинаторного типа, т.е. от того, сколько ребер у граней, сколько граней у многогранника, как грани сходятся в вершинах и т.п. Подставляя теперь в коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ вместо $l_1, \ldots, l_p$ численные значения длин ребер данного многогранника, получим многочлен $F(x)$ с конкретными числовыми коэффициентами. Теорема Сабитова утверждает, что *объем данного многогранника есть один из корней этого многочлена.*

То, что все грани треугольники, особого значения не имеет, так как любую нетреугольную грань можно разбить при помощи диагоналей на треугольники. Введенные диагонали считаются хотя и искусственными, но ребрами нового многогранника, у которого все грани суть треугольники. Рассмотрим, например, два многогранника на рисунках 1,*а* и 1,*б*. Они устроены из попарно равных граней, взятых в одном и том же порядке. После разбиения каждой четырехугольной грани диагональю, по теореме Сабитова, для них обоих существует одинаковый многочлен, один из корней которого равен объему одного из многогранников, а некоторый другой корень – объему другого.

Теперь можно объяснить, почему в силу этой теоремы гипотеза о кузнечных мехах имеет положительный ответ: флексоры при изгибании сохраняют объем. Итак, мы рассматриваем многогранник только с треугольными гранями. Далее, при изгибании тип флексора не меняется, грани сохраняются, а длины ребер остаются постоянными. Поэтому существует многочлен F с заданными коэффициентами такой, что объем флексора есть один из корней этого многочлена. Если бы объем флексора при изгибании менялся, то это должно было бы происходить непрерывно. А так как объем является корнем многочлена F, то это должен быть один и тот же корень. Таким образом, объем многогранника должен оставаться неизменным.

Обобщение теоремы Коши

Часто под разверткой многогранника подразумевают совокупность многоугольников, которые склеиваются между собой по целым сторонам, образуя многогранник. Каждый многоугольник при этом превращается в грань многогранника, а сторона многоугольника – в ребро.

Например, совокупность из 6 квадратов, у которых склеиваемые стороны и вершины отмечены одинаковыми буквами (рис.9,*б*), образуют такую особую развертку куба (рис.9,*а*). Каждый ее многоугольник – это грань многогранника. А каждая сторона многоугольника (вместе с еще одной стороной другого многоугольника) – это ребро многогранника. Вершины развертки, помеченные одной буквой, склеиваются в одну вершину многогранника.

Другая, хорошо известная развертка куба (рис.9,*в*) – крестообразная; она состоит из одного лишь многоугольника с 14 вершинами и таким же количеством сторон. Помеченные одинаковыми буквами вершины и стороны склеиваются между собой. На этой развертке куба его грани уже не представлены в виде отдельных многоугольников. Не представлены на этой развертке также и некоторые будущие ребра куба.

Познакомимся еще с одной разверткой того же куба. Для этого, напротив, вместо того чтобы склеивать квадратные грани между собой, разрежем каждую из них на четыре треугольника. Получим новую развертку куба, состоящую из 24 треугольников (рис.9,*г*). Каждый треугольник – это лишь часть грани куба. В этой развертке мы сталкиваемся с новым для нас обстоятельством: *не все* стороны развертки являются ребрами многогранника, *не все* вершины развертки являются вершинами многогранника, *каждый* треугольник развертки является лишь частью грани склеиваемого из нее куба.

Эти 24 треугольника можно склеить другим образом (опять-таки вдоль отождествляемых сторон) в один многоугольник (рис.9,*д*). В этой развертке, состоящей из единственного многоугольника, *ни одна* из сторон не является ребром куба, который получается из этой развертки.

Теперь дадим определение развертки.

Пусть имеется, вообще говоря, несколько многоугольников, у которых каждая сторона отождествлена с одной и только одной стороной того же или другого многоугольника этой совокупности. Это отождествление (или склеивание) сторон должно удовлетворять еще двум условиям:

1) отождествляемые стороны имеют одинаковую длину;

2) от каждого многоугольника к любому другому можно перейти, проходя по многоугольникам, имеющим отождествленные стороны.

Совокупность многоугольников, удовлетворяющая условиям 1) и 2), называется *разверткой*.

Как мы уже видели, многоугольники развертки, их стороны и вершины не обязаны быть гранями, ребрами и вершинами многогранников, которые из них получаются.

А.Д.Александров доказал, что *два выпуклых многогранника с одинаковой разверткой конгруэнтны.* Эта теорема сильнее теоремы Коши. Действительно, если

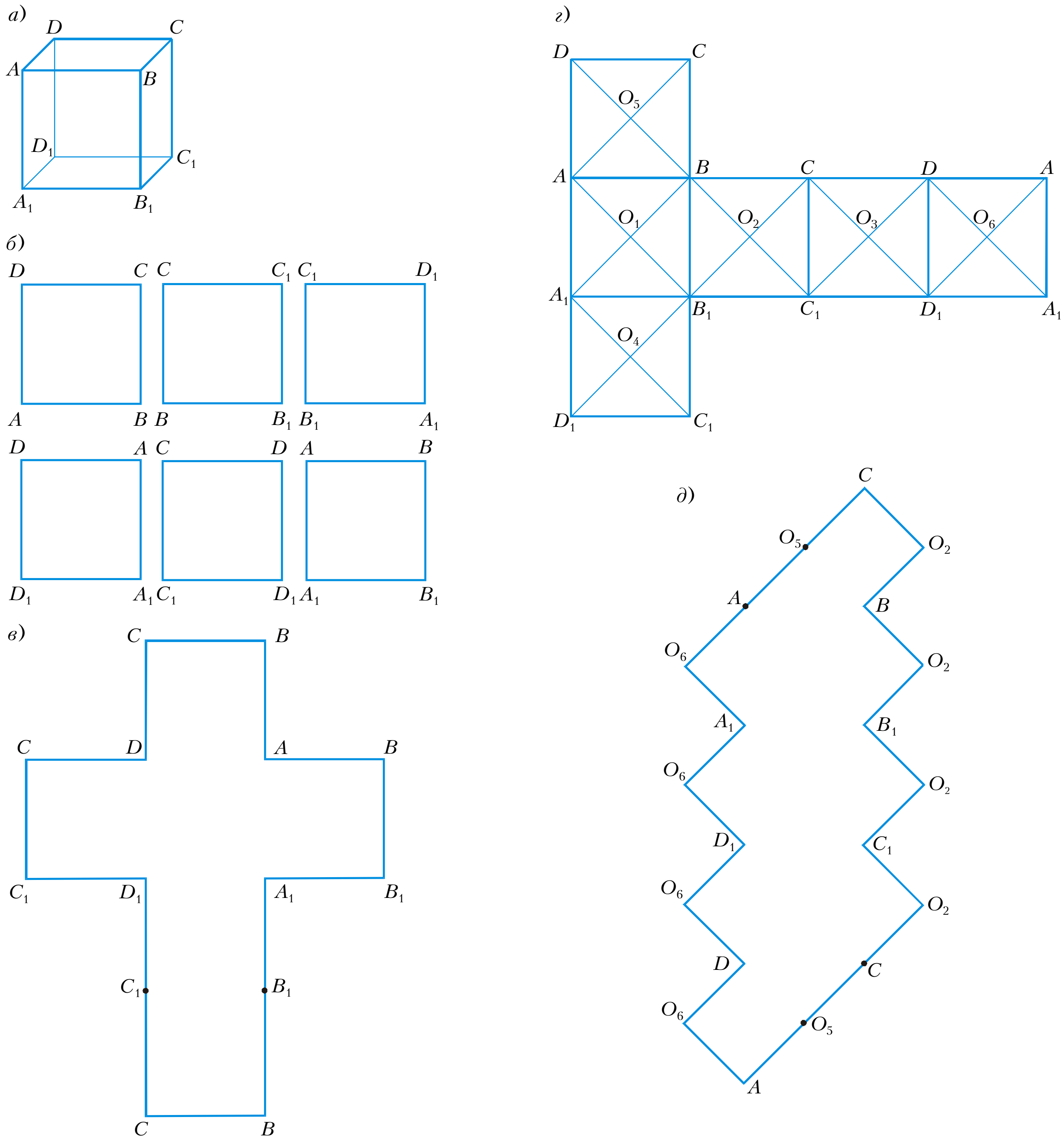

Рис.9

нам даны все грани многогранника, а также правило их склеивания по сторонам, то, конечно, развертка задана. Более того, по такой специального вида развертке, в силу теоремы Коши, многогранник восстанавливается однозначно. В то же время по развертке, которая присутствует в теореме Александрова, ничего нельзя сказать о гранях и ребрах будущего многогранника, и тем не менее многогранник из нее получается однозначно.

Более того, из развертки многогранника нельзя получить вообще никакой другой выпуклой поверхности, не только многогранной, но и криволинейной. Это усиление теоремы Коши–Александрова было получено в 1941 году учеником Александрова С.П.Оловянишниковым [3].

[3] *Сергей Оловянишников — победитель первой в СССР математической олимпиады (1934 г.). Из-за купеческого происхождения в 1930-е годы долго не мог поступить в университет. В 1941 году закончил Ленинградский университет и поступил в аспирантуру к А. Д. Александрову, тут же ушел на фронт, осенью 1941 года был ранен. В госпитале написал работу об усилении теоремы Коши–Александрова. Вернувшись на фронт, С.П.Оловянишников погиб в декабре 1941 года на “невском пятачке” – известном кровопролитными боями плацдарме.*

ных, поверхностей, то этот вопрос долгое время оставался нерешенным. Пусть произвольная замкнутая выпуклая поверхность выполнена из тонкого, гибкого, но нерастяжимого материала. Можно ли, сохраняя выпуклость, получить из нее поверхность другой геометрической формы? Если исходная поверхность выпуклый многогранник, то нельзя — по теореме Оловянишникова о единственности.

Окончательное обобщение теоремы Коши на случай произвольных поверхностей было получено в 1949 году представителем школы Александрова, академиком А.В.Погореловым. Он доказал, что любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема при условии ее выпуклости. Теорема Погорелова о единственности, как и теорема Александрова о необходимых и достаточных условиях развертки выпуклого многогранника, принадлежит к числу выдающихся достижений в области геометрии.

Теорема Александрова о развертке

Итак, мы подошли к теореме Александрова о развертках выпуклых многогранников. Нам понадобится *эйлерова характеристика развертки*, которая определяется аналогично эйлеровой характеристике многогранника:

$$\chi = В - Р + Г,$$

где $Г$ – число многоугольников, входящих в развертку, $Р$ – число сторон многоугольников, при этом отождествляемые стороны считаются за одну, $В$ – число вершин, при этом отождествляемые вершины считаются за одну.

В случае специальной развертки, когда каждый многоугольник развертки – это грань многогранника, ребро развертки – это ребро многогранника, а вершина развертки – вершина многогранника, очевидно, что эйлерова характеристика развертки равна эйлеровой характеристике многогранника.

Но нетрудно показать, что эйлерова характеристика сохраняется при перекраивании данной развертки в изометричную, так что эйлерова характеристика любой развертки многогранника равна характеристике многогранника. Поэтому *у развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна 2*.

Подсчитаем эйлерову характеристику для нескольких разверток куба. Для крестообразной развертки (см. рис.9,*в*) имеем $В = 8$, $Р = 7$, $Г = 1$ и, соответственно, $\chi = 2$. Для развертки, изображенной на рисунке 9,*д*, имеем $В = 11$, $Р = 10$, $Г = 1$, откуда опять $\chi = 2$.

Далее, если вершине развертки соответствует настоящая вершина многогранника, то сумма подходящих углов строго меньше 2π. Если же вершине развертки соответствует какая-нибудь точка внутри грани или ребра, то сумма подходящих к вершине углов равна 2π. Поэтому в развертке выпуклого многогранника сумма углов, подходящих к каждой ее вершине, *не превышает* 2π.

Итак, у всякой развертки выпуклого многогранника эйлерова характеристика равна двум, а сумма углов, подходящих к каждой вершине, не превосходит 2π. Удивительно то, что эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Теорема о развертке (А.Д.Александров). *Из всякой развертки, удовлетворяющей условиям:*
(1) ее эйлерова характеристика равна 2;
(2) сумма углов, подходящих к любой вершине развертки, не превосходит 2π,
можно склеить выпуклый многогранник.

Отметим, что среди этих многогранников могут встретиться и многогранники, которые вырождаются в плоский многоугольник. Возьмем развертку, состоящую из двух равных выпуклых многоугольников, у которых соответственные стороны и вершины попарно отождествлены (рис.10). Эйлерова характеристика такой развертки $В - Р + Г = n - n + 2 = 2$, где n – число сторон у склеиваемых многоугольников. Эта развертка удовлетворяет и условию (2). По теореме Александрова, из нее можно склеить многогранник. Это – вырожденный многогранник, или иначе «двойной многоугольник». Его можно представить как контурный многоугольник, обклеенный с обеих сторон плоскими многоугольниками.

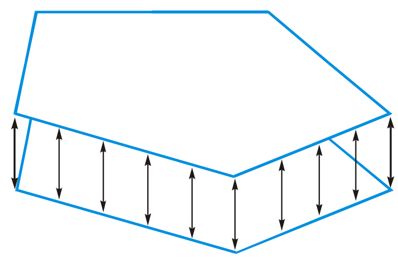

Рис.10

В отличие от теоремы Коши теорема Александрова не является интуитивно очевидной. Рассмотрим два примера.

«Тетраэдрический» пакет. В недавнем прошлом молоко разливалось в пакеты, которые имели форму не кирпича, как сейчас, а правильного тетраэдра. Хотя упаковывать в тару эти тетраэдры неудобно, зато изготавливать их легко. Сначала прямоугольная лента склеивается в цилиндр, горизонтальные края которого затем заклеиваются в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис.11). Развертка такого тетраэдра – это прямоугольник, стороны которого разбиваются на мень-

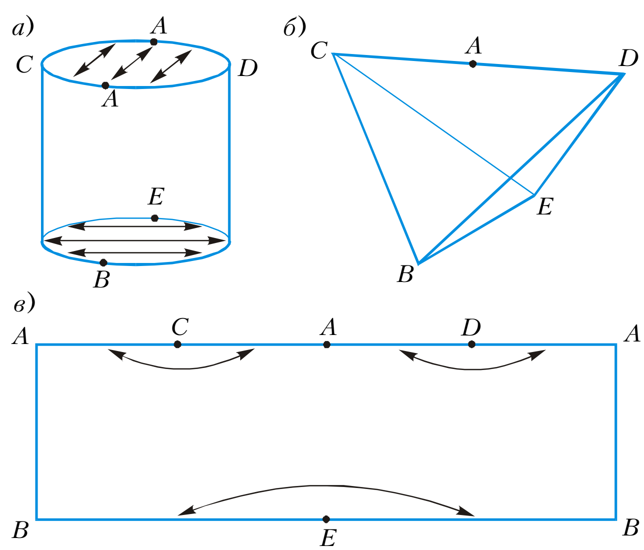

Рис.11

плоскостях (рис.11). Развертка такого тетраэдра – это прямоугольник, стороны которого разбиваются на меньшие отрезки-ребра развертки и попарно отождествляются. Данная развертка удовлетворяет обоим условиям теоремы Александрова. Это можно даже не проверять, так как мы имеем дело с разверткой выпуклого многогранника.

Упражнение 3. При каком соотношении сторон в прямоугольнике из развертки, указанной на рисунке 11, получается правильный тетраэдр?

Теперь предположим, что автомат, изготавливающий

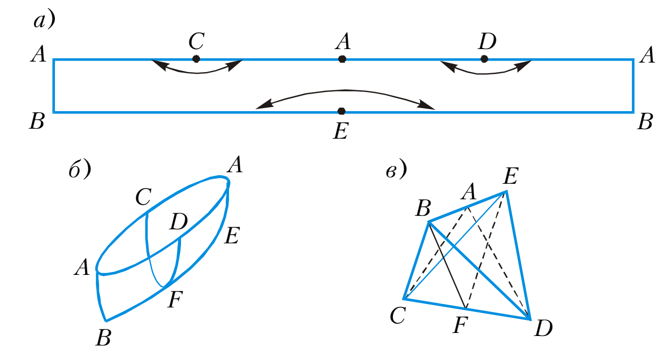

Рис.12

пакеты, «зачастил». Конкретнее, предположим теперь, что прямоугольник развертки очень «низкий», а правила склеивания остаются теми же (рис.12,*а*). Эта развертка, так же как и «высокий» прямоугольник, удовлетворяет условиям (1) и (2). По теореме Александрова, из развертки можно склеить выпуклый многогранник. С другой стороны, если нижний край цилиндра уже склеен, то для склеивания в перпендикулярном направлении не хватает высоты (рис.12,*б*). Кажется почти очевидным, что эта развертка является контрпримером к теореме Александрова. Тем не менее, и из этой развертки тоже можно склеить тетраэдр (рис.12,*в*).

Еще один контрпример. Возьмем правильный треугольник, поделим его стороны пополам и отождествим одну половинку каждой стороны с другой ее половинкой (рис.13,*а*). Из такой развертки склеивается правильный тетраэдр (рис.13,*б*).

Разрежем треугольник по прямой *AD* на два треугольника, которые склеим по общей стороне в новую развертку *ACABAD* (рис.13,*в*). И опять возникает сомнение в том, можно ли склеить из нее многогранник. Развертка на рисунке 13,*в* удовлетворяет условиям теоремы Александрова. Поэтому из нее можно склеить выпуклый многогранник. Более того, эта развертка изометрична развертке 13,*а*, и, по теореме Коши–Александрова, этот многогранник будет тем же самым правильным тетраэдром. На рисунке 13,*г* представлена еще одна развертка, изометричная предыдущим. Возможность склеить из этой «тупоугольнотреугольной» развертки тетраэдр кажется еще более сомнительной.

Тем не менее, по теореме Александрова это можно сделать. У рассматриваемой развертки имеется ровно четыре вершины (точки, в которых сумма подходящих

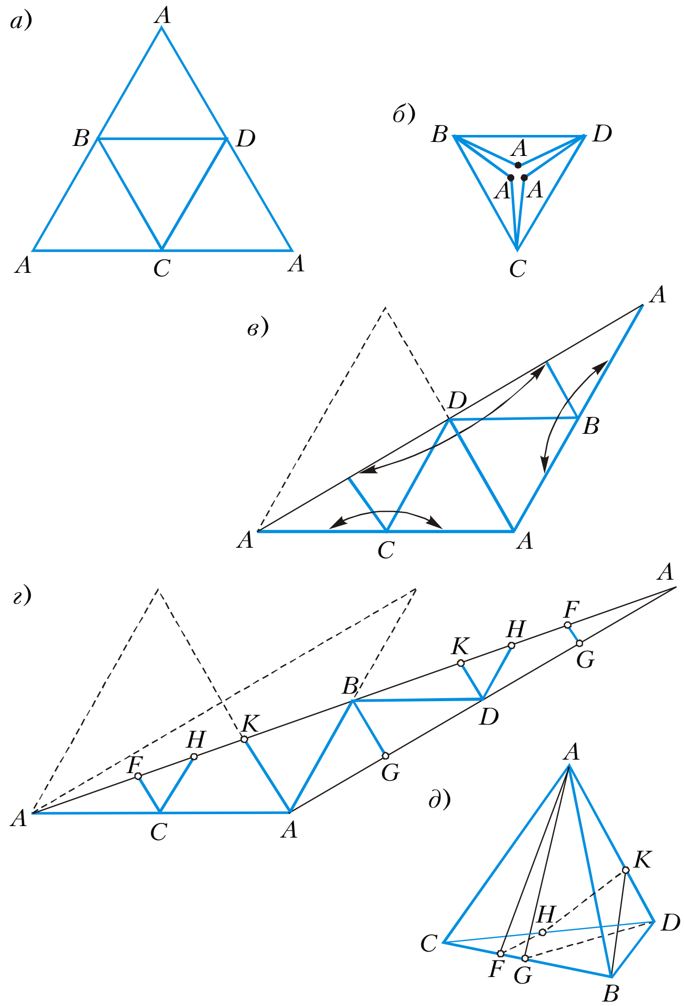

Рис.13

углов строго меньше 2π). Значит, многогранник – это тетраэдр, который может, вообще говоря, вырождаться в четырехугольник. Чтобы получить на развертке ребра будущего тетраэдра, нужно вершины попарно соединить кратчайшими линиями. Это будут ребра тетраэдра. Когда развертка «хорошая» (см. рис.13,*а*), кратчайшие состоят из целых отрезков и хорошо угадывается будущий многогранник. Но, вообще говоря, кратчайшая на развертке состоит из нескольких отрезков (см. рис.13,*б–г*) и из-за этого трудно определить, как устроены грани тетраэдра.

Задача определения многогранника по развертке, если она имеет более четырех настоящих вершин (в которых сумма подходящих углов меньше 2π), является очень трудной. По теореме Александрова о развертке мы знаем, что выпуклый многогранник существует. По теореме Коши–Александрова о единственности мы знаем, что он единственный. Возникает вопрос: каков он? Легко определить на развертке вершины многогранника. Каждому ребру на многограннике соответствует кратчайшая, соединяющая какие-то вершины. Но не все кратчайшие, соединяющие вершины, являются ребрами. Определить на развертке, какие из кратчайших являются ребрами, и, следовательно, определить все грани многогранника, – очень трудная, пока нерешенная задача.