

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} y^2 + 3xy + 1 \leq 0, \\ 9x^2 - 12x - 8y \leq 0. \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R . При каком соотношении между r и R это возможно? Найдите радиус наименьшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2} \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2 , а прямая l_2 – в точках B_1 и B_2 . Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2 , $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны прямой O_1O_2 . Через точку B_1 проведена прямая l_3 , перпендикулярная прямой l_2 . Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A , а прямую l_3 – в точке B . Найдите A_1A_2 , B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1 .

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, боковое ребро образует с основанием угол, равный $\arctg 4$. Точки E, F, K выбраны на ребрах AB, AD и SC соответственно так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3}$. Найдите 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK ; 2) расстояние от точки D до плоскости EFK ; 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK .

5. Найдите все a , при которых уравнение

$$\log_3(x + \sqrt{5 - a}) + \log_{1/3}(a - 2 - x) = \log_9 4$$

имеет решение.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0. \end{cases}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На горизонтальной поверхности стола покоится чаша с небольшой по сравнению с размерами чаши шайбой массой m (рис.1). Нижняя часть AB внутренней поверхности чаши есть часть сферы радиусом R . Глубина чаши $H = 3R/5$, ее внутренняя поверхность гладкая. Шайба начинает скользить без начальной скорости и при движении не отрывается от чаши, а чаша остается в покое. Шайба достигает точки C , для которой угол между радиусом OC и вертикалью равен α ($\cos \alpha = 4/5$). 1) Найдите скорость шайбы в точке C .

2) Найдите силу трения между чашей и столом при прохождении шайбой точки C .

2. Температура гелия уменьшилась в $k = 3$ раза в процессе $pV^2 = \text{const}$ (здесь p – давление газа, V – его объем). При этом его внутренняя энергия изменилась на 50 Дж. Найдите: 1) максимальное давление газа p_{max} ; 2) объем газа V_2 в конечном состоянии. Минимальное давление газа в этом процессе составило $p_{\text{min}} = 10^5$ Па.

3. В электрической цепи, представленной на рисунке 2, диоды D_1 и D_2 идеальные. Считая параметры элементов

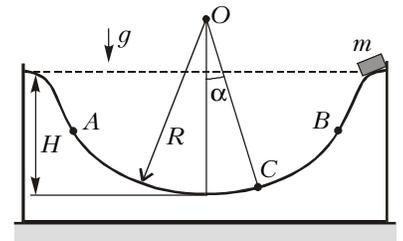


Рис. 1

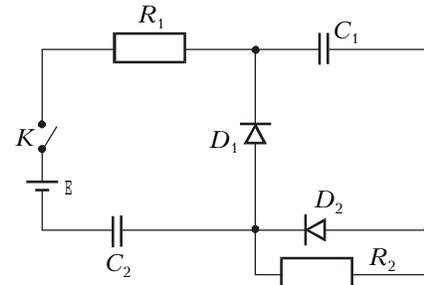


Рис. 2

цепи известными, определите: 1) ток через батарею сразу после замыкания ключа K ; 2) количество теплоты, выделившееся в схеме после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

4. Проводник массой M и длиной l подвешен за концы к непроводящему потолку с помощью двух одинаковых проводящих пружин, каждая жесткостью k (рис.3). К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкостью C . Вся конструкция находится в магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости конструкции. Проводник смещают вниз на расстояние h от положения равновесия, а затем отпускают. Определите скорость проводника, когда он снова окажется в положении равновесия. Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь.

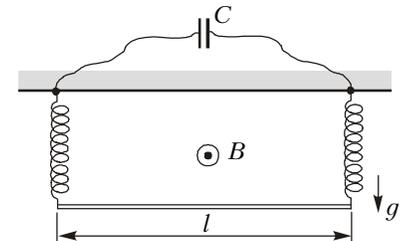


Рис. 3

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $d = 8$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см. Источник сместили вниз на расстояние $h = 4$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

Вариант 2

1. Ящик с шайбой удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (рис.4).

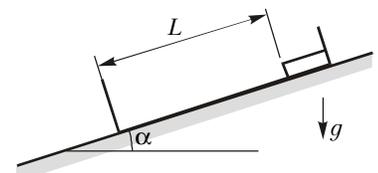


Рис. 4