Вернемся к старой переменной:

$$\sqrt{(x-3)(-x+5)} > \sqrt{5}-2 \Leftrightarrow x^2-8x+24-4\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x < 4+2\sqrt{\sqrt{5}-2}.$$

Отметим, что первый равносильный переход в последней цепочке преобразований – то, что остается от (довольно громоздкой!) схемы (2), если в ней $g(x)$ просто положительное число.

Для того чтобы решить систему (b) и получить ответ, надо заметить, что решения ее второго неравенства – интервал с центром в точке 4 радиуса $r=2\sqrt{\sqrt{5}-2}$, поэтому осталось только сравнить числа 3 и $(4-r)$. Делаем это следующим образом: подставляем $x=3$ в квадратный трехчлен, фигурировавший в последнем решенном нами неравенстве:

$$3^2-8\cdot 3+24-4\sqrt{5}=9-4\sqrt{5}=\sqrt{81}-\sqrt{80}>0.$$

Итак, число 3 расположено вне интервала корней квадратного трехчлена, поэтому оно меньше меньшего корня трехчлена, и мы можем завершить решение системы (b):

$$4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x \le 4.$$

Учитывая найденные ранее другие решения данного неравенства, получаем ответ.

Ответ: $4-2\sqrt{\sqrt{5}-2} < x \le 5$.

Пример 14. *Решите неравенство* $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}} < x-\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}$.

Решение. ОДЗ данного неравенства: $-3 \le x < 0$; $x \ge 3$.

Заметим, во-первых, что при $x<0$ данное неравенство не имеет решений: его неотрицательная левая часть не может быть меньше отрицательной правой. Поэтому осталось решить данное неравенство при $x \ge 3$.

Во-вторых, при $x \ge 3$ правая часть данного неравенства положительна: от числа, большего или равного 3, отнимается число, меньшее $\sqrt{3}$. Поэтому обе части данного неравенства в этом случае неотрицательны и его можно возвести в квадрат:

$$9-\frac{9}{x} < x^2-2x\sqrt{x-\frac{9}{x}}+x-\frac{9}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(x^2-9\right)-2x\sqrt{\frac{x^2-9}{x}}+x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-9\right)-2\sqrt{\left(x^2-9\right)x}+x>0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-9}-\sqrt{x}\right)^2>0.$$

Последнее неравенство при наших ограничениях равносильно системе

$$\begin{cases} x \ge 3, \\ \sqrt{x^2-9} \ne \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3, \\ x \ne \dfrac{1+\sqrt{37}}{2}. \end{cases}$$

Это и есть ответ.

Ответ: $x \in \left[3; \dfrac{1+\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$.

Упражнения. Решите неравенства.

11. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2-x}>1$. **12.** $\sqrt{2-x}-\sqrt{x}<1$.

13. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}} < \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$. **14.** $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$.

15. $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{4+x}$.

16. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

17. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+x}>3$.

18. $\sqrt{x-1}+x-3 \ge \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$.

19. $\sqrt{x+7}-1 < \sqrt{-x-5}+\sqrt{(x+7)(-x-5)}$.

20. $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}} > \dfrac{x-1}{x}$.

Домножим на сопряженное

Напомним, что выражения $\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}$ и $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}$ называются сопряженными друг другу. Нам понадобится хорошо известное свойство этих выражений: их произведение $\alpha^2a-\beta^2b$ уже не содержит корней из a и b. Поэтому в ряде задач вместо возведения в квадрат, приводящего к слишком громоздким выражениям, разумнее умножить обе части неравенства на выражение, сопряженное одной из них.

Пример 15. *Решите неравенство*

$$\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+3} < 2x-1.$$

Решение. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 5x+1 \ge 0, \\ x+3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{5}.$$

Домножим обе части данного неравенства на выражение, сопряженное его левой части и, очевидно, положительное в ОДЗ:

$$(5x+1)-(x+3) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-1) < (2x-1)\left(\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}\right).$$

Дальнейшее решение зависит, очевидно, от знака общего множителя $(2x-1)$ левой и правой частей полученного неравенства.

Если он меньше нуля, т.е. $-\dfrac{1}{5} \le x < \dfrac{1}{2}$, сократив на этот отрицательный множитель, приходим к неравенству $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}<2$, из которого находим (например, с помощью подстановки $\sqrt{x+3}=t \ge 0$ или прямым возведением в квадрат – ведь обе части этого неравенства положительны) $-\dfrac{1}{5} \le x < \dfrac{4-\sqrt{19}}{2}$ (обязательно проделайте все выкладки и убедитесь в правильности этого ответа).

Во втором случае, если общий множитель положителен, т.е. при $x>\dfrac{1}{2}$, после сокращения на него получаем неравенство $\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3}>2$, справедливое при всех этих значениях x: ведь тогда верны оценки

$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{x+3} > \sqrt{\frac{5}{2}+1}+\sqrt{\frac{1}{2}+3}=\sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}}>1+1=2.$$

Осталось указать, что в третьем возможном случае — если общий множитель равен нулю, — неравенство не выполняется: мы получаем тогда $0>0$, что неверно.

Ответ: $x \in \left[-\dfrac{1}{5}; \dfrac{4-\sqrt{19}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Замечание. Конечно, примененный способ привел к успеху из-за того, что разность подкоренных выражений оказалась кратной правой части данного неравенства. Это обсто-