Поскольку обе части неравенства 1) неотрицательны, оно, очевидно, равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

(понятно, что неравенство $f(x) \geq 0$ выполняется при этом автоматически).

Рассуждая аналогично для остальных случаев, получим

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \qquad (1')$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \end{array} \right. \qquad (2)$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \end{array} \right. \qquad (2')$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) < g^2(x), \\ g(x) > 0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq f(x) \leq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \qquad (3')$$

Мы видим, что самый громоздкий – второй случай. Это происходит из-за того, что здесь возможны оба варианта – когда правая часть, $g(x)$, неотрицательна и когда она меньше нуля. В первом варианте обе части исходного неравенства неотрицательны, поэтому его можно почленно возвести в квадрат, а во втором возводить в квадрат нельзя (правая часть меньше нуля), но в этом нет никакой необходимости – ведь тогда неотрицательная левая часть автоматически больше отрицательной правой.

Выписанные схемы (1) – (3′) – наш основной инструмент при окончании решения иррационального неравенства, к ним сводится решение практически любой такой задачи. Разберем несколько примеров.

Пример 1. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} > \sqrt{2-3x}$.

Решение. Согласно схеме (1), данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x+1 > 2-3x, \\ 2-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{5}, \\ x \leq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{5} < x \leq \dfrac{2}{3}$.

Пример 2. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{1-x^2-x}$.

Решение. Действуя по схеме (1′), приходим к системе

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 1-x^2-x, \\ 1-x^2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x \geq 0, & (a) \\ x^2+x-1 \leq 0. & (b) \end{cases}$$

Из неравенства (a):

$$x \leq -3;\ x \geq 0,$$

из неравенства (b):

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

после чего без труда получаем ответ.

Ответ: $0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Пример 3. *Решите неравенство* $\sqrt{x+2} > x$.

Решение. Действуем по схеме (2).

Если $x < 0$, данное неравенство выполняется при всех допустимых значениях неизвестного, т.е. при

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Таким образом, все $-2 \leq x < 0$ – решения данного неравенства (это мы решили вторую систему из совокупности схемы (2)).

Если же $x \geq 0$, данное неравенство равносильно неравенству

$$x+2 > x^2 \quad \Leftrightarrow x^2-x-2 < 0 \quad \Leftrightarrow -1 < x < 2.$$

Таким образом, все $0 \leq x < 2$ – также решения данного неравенства (это решения первой системы совокупности схемы (2)).

Объединяя полученные решения, найденные в обоих случаях, приходим к ответу.

Ответ: $-2 \leq x < 2$.

Пример 4. *Решите неравенство* $\sqrt{x^2-3x+1} > x+1$.

Решение. Снова действуем по схеме (2). Если правая часть отрицательна, т.е. $x < -1$, подкоренное выражение положительно (как, очевидно, при всех отрицательных значениях переменной – ведь тогда оно состоит из трех положительных слагаемых), и данное неравенство выполняется. Таким образом, все $x < -1$ – решения данного неравенства. Пусть теперь $x \geq -1$. Тогда можно возвести данное неравенство в квадрат и получится равносильное данному неравенство $x < 0$. Таким образом, все $-1 \leq x < 0$ – также решения данного неравенства.

Ответ: $x < 0$.

Пример 5. *Решите неравенство* $\sqrt{x+1} \geq x+5$.

Решение. Применим схему (2′). Заметим, что при всех допустимых значениях x, т.е. при $x \geq -1$, правая часть данного неравенства положительна, так что вторая система схемы (2′) не имеет решений. Итак, в ОДЗ обе части данного неравенства неотрицательны, поэтому оно равносильно неравенству $x+1 \geq x^2+10x+25$, не имеющему решений.

Ответ: нет решений.

Замечание. Другое решение этой задачи можно получить, сделав замену $t = \sqrt{x+1}$, т.е. $x = t^2-1$, где $t \geq 0$. Тогда данное неравенство приведется к квадратному неравенству $t \geq t^2+4$, не имеющему не только неотрицательных, а и вообще никаких решений.

Пример 6. *Решите неравенство* $\sqrt{2x+1} \geq 2x^2-x-1$.

Решение. Снова работает схема (2′). Разложим предварительно на множители правую часть. Неравенство примет вид

$$\sqrt{2x+1} \geq (2x+1)(x-1).\ (a)$$