

$kx_0$  ( $x_0$  – положение поршня при несжатой пружине) уравновешивается силой гидростатического давления  $\rho ghS$  за счет превышения уровня жидкости в наклонном колене на высоту  $h$  над ее уровнем в вертикальном колене. Тогда

$$E_k = \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mx'^2}{2},$$

$$E_p = \frac{k(x_0 - x)^2}{2} + \rho gSx \left( h + \frac{x}{2}(1 + \sin \alpha) \right)$$

(при смещении жидкости на малое расстояние  $x$  от положения равновесия центр масс ее элемента массой  $\rho Sx$  поднимается на высоту  $x/2 + h + (x \sin \alpha)/2$ ; (рис.2). Таким образом,

$$\frac{Mx'^2}{2} + \frac{k(x_0 - x)^2}{2} + \rho gS(1 + \sin \alpha) \frac{x^2}{2} + \rho gShx = \text{const.}$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$Mx'x'' + (k + \rho gS(1 + \sin \alpha))x'x + \rho gShx' - kx'x_0 = 0.$$

Сократим на  $x'$  и учтем, что, в силу нашего выбора начала отсчета  $x$ ,  $kx_0 = \rho gSh$ . Получим уравнение движения

$$x'' + \frac{k + \rho gS(1 + \sin \alpha)}{M} x = 0,$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k + \rho gS(1 + \sin \alpha)}}.$$

*М. Семенов*

**Ф1792.** *Ацетон и бензол смешиваются друг с другом в любых пропорциях, образуя прозрачный раствор. Объем смеси равен суммарному объему компонентов до смешивания. Коэффициент преломления света в смеси  $n$  зависит от концентраций молекул ацетона  $N_a$  и бензола  $N_b$  следующим образом:  $n^2 = 1 + K_a N_a + K_b N_b$ , где  $K_a$  и  $K_b$  – некоторые константы (поляризуемости молекул ацетона и бензола). В колбе находится  $V = 200$  мл смеси ацетона и бензола при температуре  $t_1 = 50^\circ\text{C}$ . Палочка из стекла, опущенная в колбу, освещается светом с длиной волны  $\lambda = 546$  нм и не видна в этом растворе при данной температуре. Сколько миллилитров и какой жидкости – ацетона или бензола – нужно долить в колбу после ее охлаждения до температуры  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ , чтобы после размешивания раствора стеклянная палочка не была видна при том же освещении? Коэффициенты преломления света с данной длиной волны у этих жидкостей при температуре  $t_2$  равны  $n_a = 1,36$  и  $n_b = 1,50$  соответственно, а у стекла –  $n_c = 1,47$ . Коэффициенты объемного расширения обеих жидкостей в диапазоне температур от  $t_2$  до  $t_1$  одинаковы и равны  $\alpha = 0,00124$  1/К. Тепловым расширением стекла и испарением жидкостей пренебречь.*

Обозначим объемную долю ацетона в растворе при температуре  $t$  через  $\beta_t$ . Тогда объемная доля бензола в растворе равна  $1 - \beta_t$ . Для чистых жидкостей при

температуре  $t_2 = 20^\circ\text{C}$  справедливы соотношения

$$n_a^2 = 1 + K_a N_a, \quad n_b^2 = 1 + K_b N_b.$$

Для того чтобы в растворе ацетона и бензола палочка не была видна при температуре  $t_2$ , должно выполняться условие

$$n_c^2 = 1 + \beta_{t_2} K_a N_a + (1 - \beta_{t_2}) K_b N_b.$$

Отсюда (с учетом первого соотношения) найдем объемную долю ацетона в растворе при температуре  $t_2$ :

$$\beta_{t_2} = \frac{n_c^2 - n_a^2}{n_b^2 - n_a^2} = \frac{1,5^2 - 1,47^2}{1,5^2 - 1,36^2} \approx 0,222.$$

При изменении температуры объемная доля ацетона не изменяется, поскольку коэффициенты объемного расширения обеих жидкостей по условию одинаковы. В то же время концентрации молекул ацетона и бензола меняются, поскольку изменяется объем раствора:

$$V = V_{t_2} (1 + \alpha(t_1 - t_2)).$$

Таким образом, объемная доля ацетона при температуре  $t_1 = 50^\circ\text{C}$  может быть найдена из условия

$$n_c^2 = 1 + \frac{\beta_{t_1} K_a N_a + (1 - \beta_{t_1}) K_b N_b}{1 + \alpha(t_1 - t_2)},$$

откуда

$$\beta_{t_1} = \frac{n_c^2 - 1 - (n_b^2 - 1)(1 + \alpha(t_1 - t_2))}{n_b^2 - n_a^2} = \frac{1,5^2 - 1 - (1,47^2 - 1)(1 + 0,00124 \cdot 30)}{1,5^2 - 1,36^2} \approx 0,115.$$

Ясно, что для увеличения объемной доли ацетона при  $t_2 = 20^\circ\text{C}$  в раствор нужно будет добавлять ацетон. Объем исходного раствора после охлаждения до  $t_2$  равен

$$V_{t_2} = \frac{V}{1 + \alpha(t_1 - t_2)} \approx 192,8 \text{ мл.}$$

В нем на долю бензола приходится объем

$$V_b = (1 - \beta_{t_1}) V_{t_2} \approx 170,7 \text{ мл,}$$

который после добавления ацетона должен составлять долю  $1 - \beta_{t_2}$  от нового объема раствора  $V_n$ . Отсюда

$$V_n = \frac{V_b}{1 - \beta_{t_2}} \approx 219,5 \text{ мл.}$$

Таким образом, в раствор нужно добавить объем ацетона, равный

$$\Delta V_a = V_n - V_{t_2} = \frac{n_c^2 - 1}{n_c^2 - n_a^2} \frac{\alpha(t_1 - t_2)V}{1 + \alpha(t_1 - t_2)} \approx \approx 219,5 \text{ мл} - 192,8 \text{ мл} \approx 26,7 \text{ мл.}$$

*С. Варламов*