взаимно однозначным: одинаковым числам соответствуют одинаковые спутники, разным числам – разные спутники. Таким образом, если, в соответствии с нашим предположением, не оказалось одинаковых чисел, то не окажется и одинаковых спутников.

Оценим сверху сумму всех спутников, когда модули всех чисел оказались больше 3. Нетрудно заметить, что лишь 4 комплексных числа имеют модуль, меньший 3: $1+i$, $1+2i$, $2+i$, $2+2i$. Сумма соответствующих им спутников равна

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}=\frac{1}{3}$$

(это значение пригодится чуть позже). В любой момент времени спутники всех написанных на доске чисел являются *различными* дробями вида $\frac{1}{2^a\cdot 3^b}$, поэтому их сумма заведомо *меньше* суммы *всех* дробей такого вида за вычетом суммы четырех перечисленных выше спутников. Но сумма всех дробей вида $\frac{1}{2^a\cdot 3^b}$, очевидно, равна

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

поэтому сумма всех спутников меньше $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

С другой стороны, при проведении указанных в условии операций сумма спутников не изменяется. Чтобы убедиться в этом, необходимо всего лишь проверить справедливость равенств:

$$\frac{1}{2^a\cdot 3^b}=2\times\frac{1}{2^{a+1}\cdot 3^b},$$

$$\frac{1}{2^a\cdot 3^b}=\frac{1}{2^{a+1}\cdot 3^b}+\frac{1}{2^a\cdot 3^{b+1}}+\frac{1}{2^{a+1}\cdot 3^{b+1}},$$

$$\frac{1}{2^a\cdot 3^b}=2\times\frac{1}{2^a\cdot 3^{b+1}}+2\frac{1}{2^{a+1}\cdot 3^{b+1}}.$$

Первоначально на доске было единственное число $1+i$, спутник которого равен $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6}$. Поэтому и в дальнейшем сумма спутников должна остаться равной $\frac{1}{6}$. Но, как уже выяснилось, эта сумма меньше $\frac{1}{6}$. Противоречие показывает, что предположение об отсутствии среди выписанных чисел двух одинаковых неверно. Следовательно, среди чисел непременно имеются два одинаковых, что и требовалось доказать.

И.Акулич, И.Воронович

М1779. *Найдите все многочлены f*
а) такие, что $f(x)+f(y)=f(x+y)$;
б) такие, что $af(x)=f(2001x)$,
где a – некоторое число;
в) такие, что

$$af(x)+bf(y)=f(cx+dy), \qquad (1)$$

где a, b, c, d – некоторые числа.

Пункт а) следует из пункта в), поэтому его опустим. Многочлен $\boldsymbol{f(x)=k}$ является решением **при $\boldsymbol{k=0}$**, а **при $\boldsymbol{a+b=1}$ – при любом $\boldsymbol{k}$**; ниже мы будем считать $\boldsymbol{f(x)\neq k}$. Всюду ниже

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_0.$$

б) Решим более общее уравнение

$$af(x)=f(cx), \qquad (2)$$

именно оно понадобится нам ниже, при решении в). Приравняем коэффициенты при x^n в левой и правой частях (2); получим $a\cdot a_n=a_n\cdot c^n$, или $\boldsymbol{a=c^n}$.

При $\boldsymbol{a=c=0}$ решением является любой многочлен $\boldsymbol{f(x)}$ без свободного члена: $\boldsymbol{a_0=0}$; **при $\boldsymbol{a=c=1}$ – любой многочлен $\boldsymbol{f(x)}$**. **Если $\boldsymbol{c=-1}$, то при $\boldsymbol{a=1}$** в качестве решений получаются **все четные**, а **при $\boldsymbol{a=-1}$ – все нечетные многочлены**.

Пусть $c\neq 0$, $c\neq\pm 1$, и пусть $n>i\geq 0$. Имеем: $a\cdot a_i=a_i\cdot c^i$. При $a_i\neq 0$ мы получаем противоречие: $a=c^i=c^n$. Следовательно, $a_i=0$ при $n>i\geq 0$, и $\boldsymbol{f(x)=kx^n}$.

в) Рассмотрим обе части равенства (1) как многочлены от x и приравняем коэффициенты при x^n в левой и правой его частях. Получим $\boldsymbol{a=c^n}$; аналогично $\boldsymbol{b=d^n}$. Пусть $n=1$, а значит, $a=c$ и $b=d$. Легко показать, что многочлен $\boldsymbol{f(t)=kt+h}$, где k – произвольное число, удовлетворяет (1) **при $\boldsymbol{h=0}$**, а **в случае $\boldsymbol{a+b=1}$ – и при любом $\boldsymbol{h}$.**

При рассмотрении случая $n>1$ нам понадобится следующая

Лемма. Если

$$c^n+d^n=(c+d)^n,\text{ где } n>1, \qquad (3)$$

то $cd(c+d)=0$.

Доказательство. Достаточно доказать, что многочлен

$$P(x)=(x+c)^n-x^n-c^n,$$

где $c\neq 0$, $n>1$, не может иметь корней, отличных от 0 и $-c$.

Докажем это. При четном n производная $P'(x)$ не имеет корней, значит, 0 – один-единственный корень многочлена $P(x)$. При нечетном n производная имеет единственный корень, значит, 0 и $-c$ – единственные корни многочлена $P(x)$. Лемма доказана.

(Можно рассуждать и по-другому: воспользоваться тем, что функция

$$Q(t)=P\left(t-\frac{c}{2}\right)=\left(t+\frac{c}{2}\right)^n-\left(t-\frac{c}{2}\right)^n-c^n=$$

$$=q_{n-1}t^{n-1}+q_{n-3}t^{n-3}+\ldots$$

при четном n монотонна на всей оси, а при нечетном – на положительной и отрицательной полуосях.)

Рассмотрим теперь обе части (1) как многочлены от $t=x=y$. Рассуждая как выше, получим:

$$a+b=(c+d)^n,$$

а значит,

$$c^n+d^n=(c+d)^n.$$

По лемме отсюда следует, что $cd(c+d)=0$.

В случаях $c=0$ и $d=0$ (1) сводится к (2); пусть $c\neq 0$,