Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1796» или «Ф1803». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1796—М1800, Ф1803–Ф1807

М1796. Король обошел шахматную доску, побывав на каждом поле по одному разу, и последним ходом вернулся на исходное поле. Когда соединили центры полей, которые он последовательно проходил, получилась замкнутая ломаная из 64 звеньев (каждому ходу соответствует одно звено). Оказалось, что никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. Докажите, что наименьшее возможное число диагональных ходов равно 8.

И.Акулич

М1797. Красные и синие точки, строго чередуясь, разделили окружность на $2n$ дуг. Из них любые две смежные дуги различаются по длине на 1. Докажите, что n-угольник с красными вершинами и n-угольник с синими вершинами имеют равные периметры и равные площади.

В.Произволов

М1798. Известно, что в некотором городе живут 1000 человек и ровно 300 из них – честные. Остальных назовем хитрыми. На некоторые вопросы хитрые отвечают правду, а на некоторые лгут по своему усмотрению. Сколько хитрых людей мы можем обнаружить, задавая жителям произвольное число вопросов, при условии, что жители все друг о друге знают?

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1799*. Натуральные числа x и y таковы, что сумма $xy + x + y$ дает квадрат целого числа. Докажите, что найдется натуральное число z такое, что каждая из семи сумм $xy + z$, $yz + x$, $zx + y$, $yz + y + z$, $zx + z + x$, $xy + yz + + zx$ и $xy + yz + zx + x + y + z$ дает квадрат целого числа.

В.Произволов

М1800. Докажите, что сумма квадратов площадей граней любого тетраэдра равна учетверенной сумме квадратов площадей трех его сечений, каждое из которых проходит через середины четырех ребер.

А.Заславский

Ф1803. Под каким углом к горизонту следует бросить камень, чтобы расстояние от него до точки бросания в течение полета все время возрастало? Камень бросают с небольшой скоростью, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

З.Рафаилов

Ф1804. Грузы, массы которых M и $4M$, при помощи легкой нерастяжимой нити подвешены на очень легком подвижном блоке. Еще один кусок такой же нити переброшен через неподвижный блок, к одному концу этой нити прикреплен подвижный блок, к другому – груз массой m. При каких значениях m один из грузов может оставаться неподвижным после того, как тела перестанут удерживать?

А.Блоков

Ф1805. В сосуде объемом 1 л находится моль азота при давлении 1 атм. Азот медленно откачивают, поддерживая температуру сосуда неизменной. Какую массу газа придется откачать к тому моменту, когда давление в сосуде упадет вдвое?

Д.Александров

Ф1806. К батарейке подключены два очень длинных одинаковых проводника, расположенных параллельно друг другу. Между проводниками включено огромное количество одинаковых вольтметров, как показано на рисунке (все образованные про-