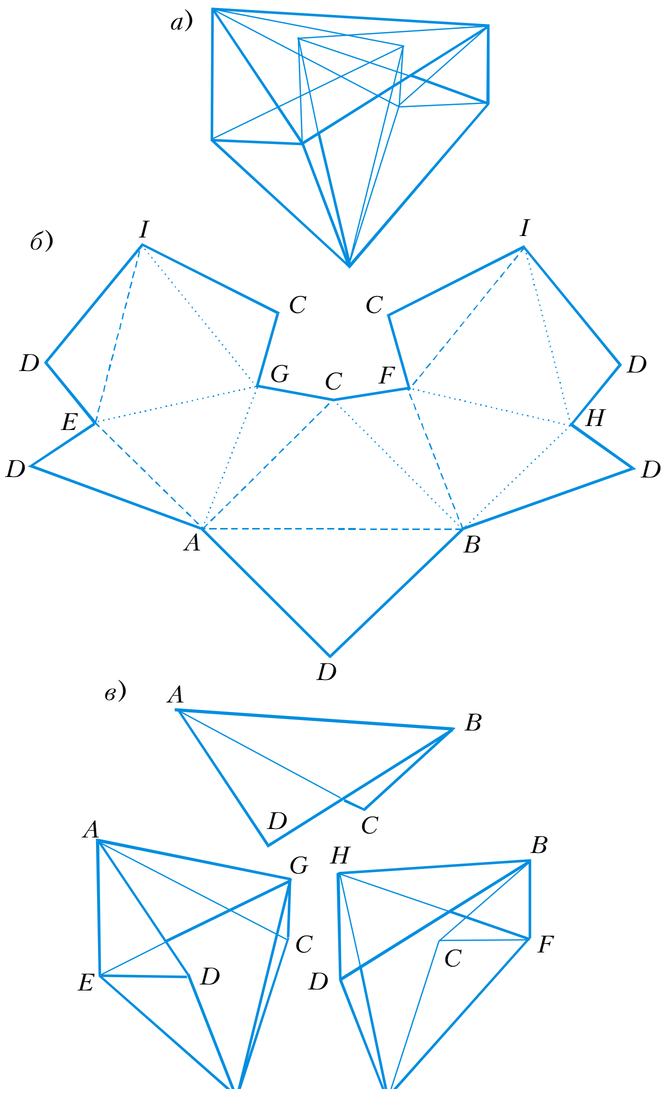

Рис.7

первой половинки. Значит, и весь октаэдр Брикара изгибаем.[1]

В 1970-е годы выяснилось, что Эйлер в своем предположении был «почти» прав… и не прав. Почти прав потому, что, как было установлено в 1975 году, «почти все» (т.е. в некотором смысле подавляющее большинство) многогранники неизгибаемы. Однако «почти все» – это еще не все многогранники. Два года спустя, в 1977 году, американский геометр Р.Коннэлли построил первые примеры изгибаемых самонепересекающихся многогранников и тем самым опроверг гипотезу Эйлера. Коннэлли назвал такие многогранники *флексорами*[2]. Затем были построены другие представители изгибаемого меньшинства. На рисунке 7,*а* изображен флексор с 9 вершинами, построенный в 1979 году геометром К.Штеффеном. Возможно, что 9 – это наименьшее число вершин, которое может быть у флексоров. Развертка флексора Штеффена показана на рисунке 7,*б*. Разный вид пунктирных линий на развертке означает, что грани перегибаются вдоль этих линий в противоположные стороны. На рисунке 7,*в* показана схема сборки многогранника Штеффена.

Гипотеза кузнечных мехов и теорема Сабитова

Не исключено, что открытие изгибаемых многогранников кому-то покажется не очень удивительным, особенно если он вспомнит о мехах музыкальных инструментов, например баяна. Но это – неверная ассоциация. Мехи баяна «работают» из-за некоторой эластичности и сминаемости материала, из которого они изготовлены. Если бы мехи баяна были собраны из твердых пластин, соединенных между собой петлями, то сыграть на таком инструменте не удалось бы. Такие мехи, как нетрудно понять, нельзя было бы ни сжать, ни растянуть (рис.8).

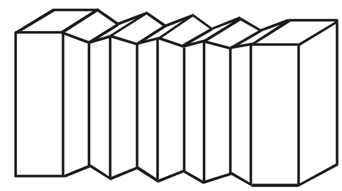

Рис.8

Впрочем, было замечено, что все флексоры, которые удалось открыть, тоже непригодны для мехов, но совершенно по другой причине. Несмотря на то что при изгибании флексор меняет свою форму, для всех построенных флексоров было замечено, что заключенный в многограннике объем при изгибании остается постоянным, т.е. изгибаемый многогранник «не дышит». Возникла *гипотеза кузнечных мехов* о том, что это всегда так – для всякого флексора его объем не изменяется при изгибании.

Содержательная проблема хороша тем, что попытки решить ее приводят к появлению новых методов и теорем, которые иногда более интересны, чем породившая их проблема. Так произошло и в этом случае, когда раздумья над гипотезой о кузнечных мехах привели российского математика Иджада Хаковича Сабитова в 1996 году к открытию неожиданной теоремы. Чтобы лучше понять ее смысл, вспомним формулу Герона. Она выражает площадь треугольника *лишь* через его стороны:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Для многоугольников с бóльшим числом сторон формулы, выражающей площадь лишь через стороны, нет, поскольку стороны сами по себе, если не заданы углы, не определяют ни форму, ни площадь многоугольника. Например, площадь ромба со стороной a может быть любой между 0 и a^2.

Для многогранников картина принципиально иная. Предположим сначала, что все грани многогранника – треугольники. В этом случае длины его ребер одно-

---

[1] *Так как октаэдр Брикара самопересекается, то склеить его из бумаги невозможно. Однако легко сконструировать его реберную модель из тонких пластиковых трубочек для питья, нанизав их соответствующим образом на нитки.*

[2] *От английского слова flex – изгибать.*