При этом соответственные ребра, двугранные углы при которых равны, не получают никакого знака (остаются нейтральными).

Выберем любую вершину v многогранника M, к которой подходит хотя бы одно ребро со знаком. Рассмотрим многогранный угол многогранника M с вершиной v. По следствию из леммы 2, число перемен знака при обходе v не меньше четырех. С другой стороны, по лемме 1, среди таких вершин должна быть хотя бы одна, при обходе вокруг которой число перемен знака не больше двух. Полученное противоречие доказывает теорему Коши.

Отметим, что теорема Коши позволяет ослабить определение правильных многогранников. Напомним, что *правильным* многогранником называется выпуклый многогранник, у которого все грани суть равные правильные многоугольники и двугранные углы попарно равны.

Упражнение 1. Докажите, что выпуклый многогранник, все грани которого равные правильные многоугольники, является правильным многогранником тогда и только тогда, когда в каждой вершине сходится одинаковое число граней. (*Указание.* Очевидно, что у правильного многогранника во всех вершинах сходится одинаковое число граней. Для доказательства в обратную сторону нужно воспользоваться сначала теоремой Эйлера, а затем теоремой Коши.)

Гипотеза Эйлера и изгибаемые многогранники

Вопрос – однозначно ли задается форма многогранной поверхности своими гранями или она может меняться за счет изменения двугранных углов, давно интересовал математиков. В 1776 году великий Эйлер высказал гипотезу: «Замкнутая пространственная фигура не допускает изменений, пока не рвется». Под «замкнутой пространственной фигурой» понималось то, что сейчас принято называть замкнутой поверхностью. Тем самым предположение Эйлера относилось не только к многогранным поверхностям. Теорема Коши подтвердила гипотезу Эйлера в случае выпуклых многогранников. На протяжении двух веков геометры верили, что не только выпуклый, но и невыпуклый многогранник тоже неизгибаем. Хотя первые сомнения зародились в конце XIX века после того, как в 1897 году французский математик Брикар нашел первые контрпримеры к гипотезе Эйлера. Правда, эти изгибаемые многогранники, так называемые октаэдры Брикара, – не совсем обычные многогранники: они самопересекаются.

Идея Брикара очень остроумна. Возьмем в пространстве четырехугольник $ABCD$ с попарно равными противоположными сторонами: $AB = CD$, $BC = AD$. Если $ABCD$ лежит в плоскости, то это – знакомый нам параллелограмм. Пусть $ABCD$ – пространственный четырехугольник, т.е. вершины A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Его диагонали AC и BD лежат на скрещивающихся прямых. Проведем через середины O_1 и O_2 диагоналей прямую l (рис.5). Так как в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны, то прямая l, как нетрудно показать, перпендикулярна обеим диагоналям.

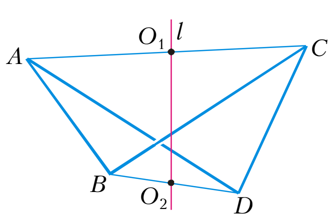

Рис.5

Упражнение 2. Докажите, что прямая, проходящая через середины диагоналей пространственного четырехугольника с попарно равными противоположными сторонами, перпендикулярна обеим диагоналям.

В силу этой перпендикулярности при повороте вокруг прямой l на 180° вершины A и C, а также B и D меняются местами и, следовательно, четырехугольник $ABCD$ переходит в себя. Заметим, что в предельном случае, когда многоугольник становится плоским параллелограммом, точки O_1 и O_2 сливаются в одну точку, а прямая l переходит в прямую, проходящую через точку пересечения диагоналей параллелограмма перпендикулярно его плоскости.

Возьмем вне прямой l какую-нибудь точку S и построим четыре треугольника SAB, SBC, SCD и SDA (рис.6,*а*). Эти треугольники (точнее, их плоскости) образуют четырехгранный угол. Из школьного курса геометрии известно, что плоские углы трехгранного угла задают его двугранные углы, а следовательно, и весь трехгранный угол однозначно. Однако если число граней у многогранного угла больше трех, то такой однозначности нет. Очевидно, что четырехгранный угол $SABCD$ при фиксированных плоских углах допускает непрерывную деформацию (изгибание). При таком изгибании четырехугольник $ABCD$ деформируется в четырехугольник с соответственно такими же сторонами и соответствующей осью симметрии.

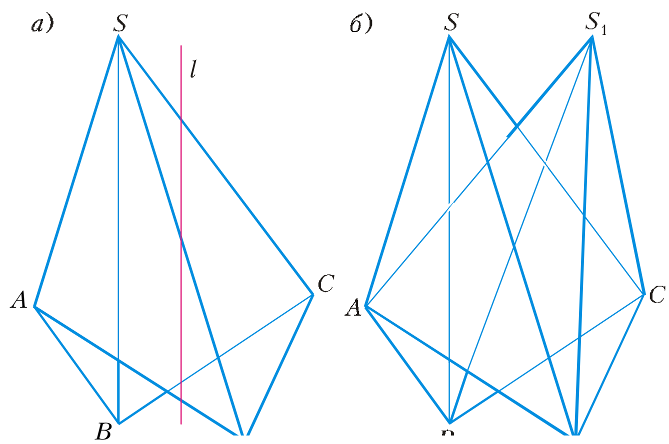

Рис.6

При повороте вокруг оси l на 180° четырехгранный угол $SABCD$ переходит в конгруэнтный угол S_1CDAB (рис.6,*б*). Совокупность 8 треугольников удовлетворяет всем трем условиям в определении многогранника. Правда, некоторые грани этого многогранника пересекают друг друга. Этот самопересекающийся многогранник и есть *октаэдр Брикара*.

Почему октаэдр Брикара изгибаем? Половинка октаэдра, очевидно, изгибается. Вторая половинка получается из первой поворотом вокруг оси l, и, следовательно, ее деформация в точности повторяет деформацию