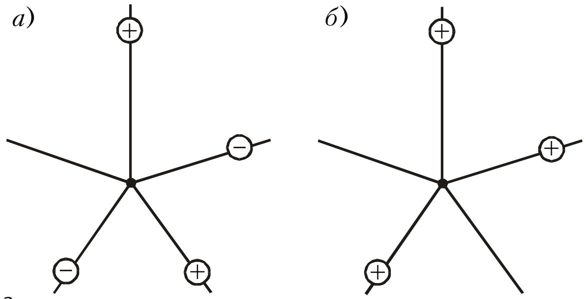

Рис.2

мен знака равно четырем, а на рисунке 2,*б* – нулю. Очевидно, что число перемен знака должно быть четным. В частности, оно равно нулю, если к вершине не подходит ни одного ребра со знаком или наряду с нейтральными подходят лишь ребра одного знака.

Лемма 1 (О.Коши). *Пусть на замкнутом выпуклом многограннике некоторые ребра отмечены знаком «+» или «–». Выделим все те вершины многогранника, к которым подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда среди выделенных вершин всегда найдется такая вершина, при обходе вокруг которой встретится менее четырех перемен знака.*

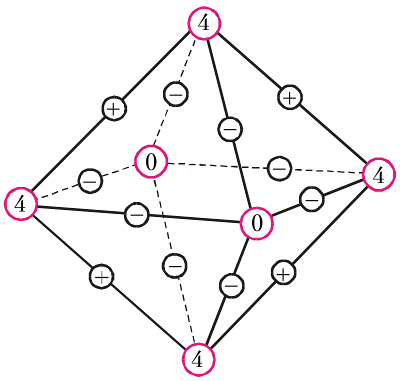

Рис.3

Например, в приведенной на рисунке 3 расстановке знаков на ребрах октаэдра четыре вершины имеют 4 перемены знака и две вершины не имеют ни одной перемены знака.

Во второй лемме речь идет о выпуклых многоугольниках на плоскости или на сфере. Скажем несколько слов о том, что такое сферический многоугольник. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – совокупность точек на сфере. Замкнутая ломаная, состоящая из n дуг больших окружностей $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, образует *сферический многоугольник*. Дуги являются сторонами многоугольника, а *углом* сферического многоугольника является угол между касательными, проведенными к смежным сторонам в их общей вершине. Сферический многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой большой окружности, содержащей его сторону. Если мы возьмем выпуклый многогранный угол с вершиной в центре сферы, то он вырезает на этой сфере выпуклый сферический многоугольник. Сторонами этого многоугольника являются дуги, по которым грани многогранного угла пересекаются со сферой.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ – выпуклые n-угольники, причем $A_1A_2 = B_1B_2, \ldots, A_{n-1}A_n = B_{n-1}B_n$. Припишем каждой вершине A_i первого многоугольника знак «+» или «–» в зависимости от того, больше или меньше угол A_i угла B_i. Если $\angle A_i = \angle B_i$, то вершина A_i остается нейтральной.

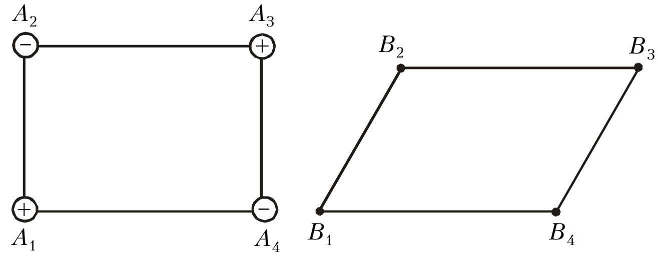

Рис.4

Возьмем, например, прямоугольник и параллелограмм с соответственно равными сторонами (рис.4). Подсчитаем число перемен знака при обходе всех вершин. Оно равно четырем.

Лемма 2 (О.Коши). *Пусть у двух выпуклых n-угольников на плоскости (или на сфере) соответственные стороны попарно равны, а среди соответственных углов имеются попарно неравные. Отметим знаком «+» (или «–») вершины тех углов одного многоугольника, которые строго больше (или меньше) соответствующих углов другого. Тогда при обходе вершин первого многоугольника число перемен знака не меньше четырех.*

Заметим, что если из двух многоугольников с соответственно равными сторонами хотя бы один невыпуклый, то лемма неверна.

Из леммы 2 вытекает важное для доказательства теоремы Коши

Следствие. *Пусть два выпуклых многогранных угла с одинаковым числом граней имеют соответственно равные плоские углы. Припишем каждому ребру одного из многогранных углов знак «+» (или «–») в зависимости от того, больше (или меньше) двугранный угол при нем соответствующего двугранного угла другого многогранного угла. Тогда число перемен знака при обходе ребер этого многогранного угла не меньше четырех.*

Действительно, опишем из вершин многогранных углов как из центров сферы одного и того же радиуса. Грани выпуклых многогранных углов вырезают на сферах выпуклые многоугольники. Так как соответственные плоские углы многогранных углов равны, равны также и соответственные стороны сферических многоугольников. Углы многоугольников равны двугранным углам многогранных углов. Поэтому знаки на ребрах первого многогранного угла совпадают со знаками в вершинах первого многоугольника. Отсюда, по лемме 2, вытекает следствие.

Из леммы 1 и леммы 2 (точнее, из следствия) легко получить доказательство теоремы Коши. Предположим, что многогранники M и M', хотя и составлены из попарно равных граней, взятых в одинаковом порядке, тем не менее не конгруэнтны друг другу. Это возможно, лишь когда при некоторых соответственных ребрах этих многогранников имеются *неравные* двугранные углы. Расставим на ребрах многогранника M знаки «+» или «–» в зависимости от того, больше или меньше двугранный угол при данном ребре двугранного угла при соответствующем ребре другого многогранника.