Три теоремы о выпуклых многогранниках

Н.ДОЛБИЛИН

Теорема Коши

Огюстена Луи Коши (1789–1857) «по его блестящим достижениям во всех областях математики можно поставить почти рядом с Гауссом». Эта оценка, данная французскому математику немецким математиком Феликсом Клейном, очень весома, особенно если учесть, что взаимоотношения между французскими и немецкими математиками развивались в атмосфере острой конкуренции и признание заслуг соперников никогда не отличалось щедростью. Гигантское научное наследие Коши занимает 25 внушительных томов и включает около 800 работ. Работы, принесшие Коши славу великого математика, относятся в основном к математическому анализу, алгебре, математической физике, механике. Его исследования по геометрии могли бы остаться незамеченными, если бы не работа «О многоугольниках и многогранниках», опубликованная в «Журнале Политехнической школы» в 1813 году. В этой работе недавний выпускник знаменитой Политехнической школы доказал замечательную теорему о выпуклых многогранниках.

Аккуратное определение многогранника дано в первой части статьи. Здесь мы вспомним, что два многогранника *равны*, или *конгруэнтны*, если их можно совместить движением, а также, что многогранник называется *выпуклым*, если плоскость, проходящая через любую его грань, оставляет все остальные грани многогранника по одну сторону.

Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данными гранями. *Два выпуклых многогранника с попарно равными гранями, составленными в одном и том же порядке, равны.*

Рассмотрим три многогранника (рис.1). Все они состоят из попарно равных граней. Но если первые два многогранника составлены из попарно равных граней, примыкающих друг к другу в одном и том же порядке, то третий многогранник составлен из тех же граней, но примыкающих друг к другу иначе.

а) б) в)

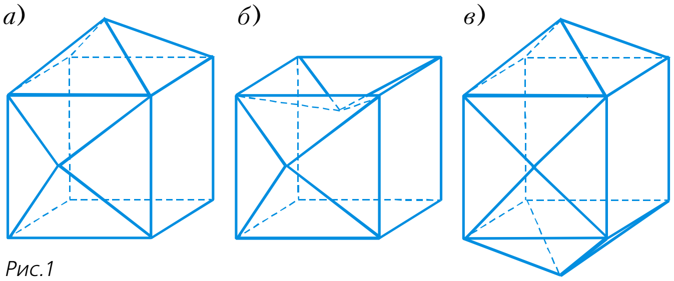

Рис.1

Иллюстрация В.Хлебниковой

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №5

То, что одинаково составленные многогранники не равны друг другу, нас не должно смущать: ведь один из многогранников (1,*б*) невыпуклый, а, как доказал Коши, в классе выпуклых многогранников подобная ситуация невозможна.

Теорема Коши, в частности, объясняет, почему модель выпуклого многогранника, склеенная из картона, не деформируется, или, как еще говорят, неизгибаема. Многогранник, который может непрерывно деформироваться так, что его грани остаются плоскими и равными самим себе и меняются лишь его двугранные углы, называется *изгибаемым*. Если же такой непрерывной деформации не существует, то многогранник *неизгибаем*.

Допустим, что выпуклый многогранник M изгибаем. Тогда существует другой, не равный ему многогранник M', двугранные углы которого мало отличаются от соответственных углов в многограннике M. Если отличие углов достаточно маленькое, то многогранник M' также выпуклый. А так как соответственные грани этих многогранников равны, то, по теореме Коши, и сами многогранники конгруэнтны. Мы пришли к противоречию с предположением о том, что многогранник M изгибаем.

Для доказательства этой теоремы Коши предложил новый метод, который, по словам А.Д.Александрова, «представляет собой одно из прекраснейших рассуждений, какие только знает геометрия».

Идея доказательства теоремы Коши

Доказательство теоремы Коши о единственности выпуклого многогранника основано на двух леммах. Одна из них весьма неожиданная. Рассмотрим выпуклый многогранник. Отметим некоторые его ребра знаком «+» или «−», а остальные ребра оставим «нейтральными». Выберем какую-нибудь вершину v и, начиная с любого подходящего к ней ребра, последовательно обойдем все ребра, сходящиеся в v, и вернемся к исходному ребру. Если в процессе обхода после очередного ребра с одним знаком следует ребро с противоположным, то мы говорим, что происходит *перемена знака*. Нейтральные ребра, которые могут находиться между отмеченными ребрами, при этом не учитываются. Обозначим через $N(v)$ общее число перемен знака при обходе вершины v. Например, для вершины v, изображенной на рисунке 2,*а*, число пере-