Решения задач М1766—М1770, Ф1778–Ф1787

М1766. *На бесконечной шахматной доске находятся ферзь и невидимый король, которому запрещено ходить по диагонали. Они ходят по очереди. Может ли ферзь ходить так, чтобы король рано или поздно наверняка попал под шах?*

Ответ: может. Вот один из способов движения ферзя – делать все ходы на одну клетку по диагонали, двигаясь при этом по такой разворачивающейся спирали: 1 ход вправо-вверх, затем 10 ходов вправо-вниз, 100 ходов влево-вниз, 1000 ходов влево-вверх, 10000 ходов вправо-вверх и т.д. Докажем, что где бы ни был король вначале, рано или поздно ферзь окажется с ним на одной горизонтали или вертикали. Введем прямоугольную систему координат с единицей, равной стороне клетки. Расположим оси так, чтобы все центры клеток имели целые координаты (координаты центра будем называть координатами клетки), ферзь стоял в начале координат, а король оказался в некоторой точке (x, y) с обеими положительными координатами.

Заметим, что каждым ходом каждая из координат фигур меняется не более чем на 1. Обе координаты ферзя вначале меньше соответствующих координат короля. Если в какой-то момент хотя бы одна из координат ферзя станет больше, чем у короля, то (по принципу дискретной непрерывности) эти координаты в какой-то промежуточный момент были равны, т.е. король и ферзь стояли на одной горизонтали или вертикали, и король был под шахом.

Скажем, что ферзь сделал ход в правильном направлении, если обе его координаты увеличились. (Из каждых четырех серий ходов подряд ферзь одну серию делает в правильном направлении, сам того не подозревая.) Оценим координаты ферзя и короля после того, как ферзь сделает серию из 10^k ходов в правильном направлении, где $10^k > 5(x+y)$. Всего к этому моменту ферзь сделает $n = 10^k + \underbrace{11\ldots11}_{k}$ ходов, и так как $\underbrace{11\ldots11}_{k} < 0{,}2 \cdot 10^k$, то $n < 1{,}2 \cdot 10^k$. Даже если все ходы до этой серии уменьшали его координаты, все равно обе координаты будут больше $(1-0{,}2) \cdot 10^k = 0{,}8 \cdot 10^k$. Сумма координат короля вначале была $x + y < 0{,}2 \cdot 10^k$. Каждым ходом король меняет эту сумму ровно на 1 (ходов по диагонали нет!). За n ходов сумма его координат увеличилась не более чем на n, поэтому она не превосходит $1{,}4 \cdot 10^k$. Следовательно, меньшая из координат не превосходит $0{,}7 \cdot 10^k$, т.е. меньше, чем у ферзя. А из этого уже следует утверждение задачи.

Так как король невидим для ферзя, то игра остановится по знаку судьи, когда он увидит, что шах произошел.

А.Шаповалов

М1767. *Внутри квадрата ABCD расположены точки P и Q так, что $\angle PAQ = \angle PCQ = 45°$. Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + QD^2$ (рис.1).*

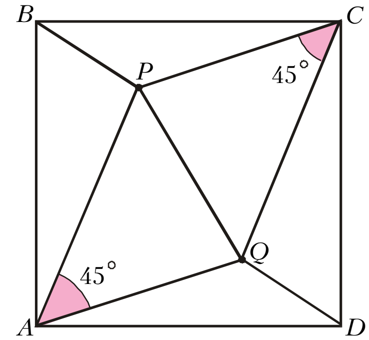


Рис.1

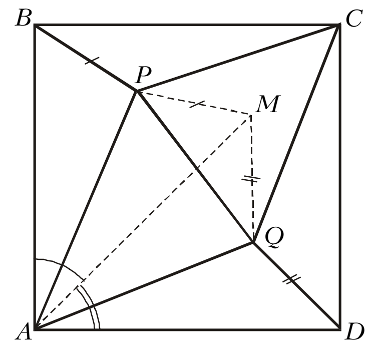


Рис.2

Симметрично отразим ΔAPB относительно прямой AP, а ΔAQD – относительно прямой AQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку M (рис.2). Затем симметрично отразим ΔCPB относительно прямой CP, а треугольник CQD – относительно прямой CQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку N.

Заметим, что $\angle PMQ + \angle QNP = 180^\circ$, но так как треугольники PMQ и QNP равны, то $\angle PMQ = \angle QNP$, т.е. $\angle PMQ = 90^\circ$.

Значит, треугольник PMQ прямоугольный и $PM^2 + QM^2 = PQ^2$. Но $PM = BP$, а $QM = QD$, поэтому окончательно можно утверждать, что $PB^2 + QD^2 = PQ^2$.

В.Произволов

М1768. *а) Расположите числа 1, 2, 3, …, 100 в строку в таком порядке, чтобы для любых нескольких (но не всех) из этих чисел сумма номеров занятых ими мест не совпадала с суммой самих этих чисел.*

б) При посадке в аэробус пассажиры сели кто куда захотел. В итоге все места оказались заняты, а для любой группы, в которой не более ста пассажиров, среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест более чем на единицу отличается от среднего арифметического номеров мест, указанных в их билетах. Каково наименьшее возможное число мест в этом аэробусе?*

а) Укажем два способа: 100, 1, 2, …, 97, 98, 99 и 2, 3, 4, …, 99, 100, 1. Каждый из них дает требуемое расположение чисел, в чем легко непосредственно убедиться.

б) **Ответ**: 301 место.

Каждый пассажир включен в один из циклов вида $P_1P_2\ldots P_m$, где $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – некоторые пассажиры, причем P_i-й пассажир ($i = 1, 2, \ldots, m-1$) имеет билет на место, которое занимает P_{i+1}-й пассажир, а P_m-й пассажир – на место, которое занимает P_1-й пассажир. Если в таком цикле 100 пассажиров или менее, то все они могли составить одну рассматриваемую группу, для которой среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест равно среднему арифметическому номеров мест, указанных в их билетах, что противоречит условию. Поэтому $m \geq 101$. Значит, если число циклов не меньше 3, то в аэробусе размещаются 303 или более пассажиров. Заметим далее, что если P_k, P_{k+1}, …, P_{k+r} – цепочка пассажиров, последовательно включенных в некоторый цикл, причем номера билетов P_k-го и P_{k+r}-го отличаются на 1, то $r \geq 101$. Рассматривая цепочку P_{k+r}, P_{k+r+1}, …, P_m, P_1,… …, P_k, получим неравенство $m-(k+r)+k \geq 101$. Следовательно, $m \geq 101+r \geq 202$, и поэтому число мест в аэробусе может быть меньшим, чем 303, только если выполняется одно из следующих условий:

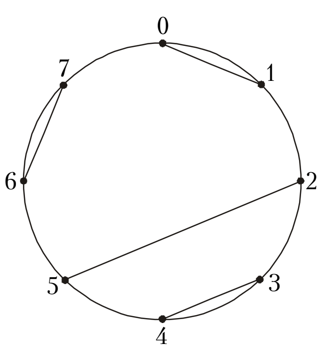
1) все пассажиры включены в один цикл;

2) число циклов равно 2, причем любые два билета на соседние (по номерам) места принадлежат пассажирам из разных циклов.

Пусть выполнено первое условие. Рассмотрим пассажиров A_n, A_{n+1} и A_{n+2} с билетами на n-е, $(n+1)$-е и $(n+2)$-е места соответственно. Между A_n-м и A_{n+1}-м пассажирами в кратчайшей из цепочек, их соединяющих, имеется не менее 100 пассажиров, между A_{n+1}-м и A_{n+2}-м также не менее 100 пассажиров, а между A_{n+2}-м и A_n-м либо нет ни одного пассажира, либо имеется не менее 100. Значит, если общее число мест меньше 303, то либо A_n сидит на $(n+2)$-м месте, либо A_{n+2} сидит на n-м месте. Ввиду произвольности номера n имеем (с точностью до направления) цикл $A_1A_3A_5\ldots A_NA_2A_4\ldots A_{N'}$, где N и N' – наибольший нечетный и наибольший четный номера соответственно, а A_i – пассажир, занимающий i-е место, $i = 1, 2, \ldots, \max(N, N')$. Пассажиры, сидящие на местах N, 2, 4,…, 198, имеют билеты на места 2, 4, 6, …, 200, а разность соответствующих средних равна $(N-200):100$. Так как эта разность больше 1, получаем $N \geq 301$. Нетрудно убедиться, что цикл $A_1A_3A_5\ldots A_{301}A_2A_4\ldots A_{300}$ удовлетворяет условиям задачи. Пусть теперь выполнено второе условие, т.е. имеются два цикла, каждый из которых включает всех пассажиров с билетами на места одной четности. Если в каком-нибудь из этих циклов пассажир A_n сидит не на $(n+2)$-м месте, а A_{n+2} – не на n-м месте, то в цикле не менее 202 пассажиров, а в аэробусе – не менее 403 мест. В противном же случае имеем (с точностью до направления) цикл $A_1A_3A_5\ldots A_N$, где пассажиры с билетами на места 1, 3, 5, …, 199 сидят на местах N, 1, 3, …, 197; разность соответствующих средних арифметических $(N-199):100$ больше 1, откуда $N \geq 301$.

С.Токарев

М1769*. *Концы 2n непересекающихся хорд разделили окружность на 4n равных дуг. Докажите, что среди этих хорд найдутся две параллельные хорды.*



Будем считать, что окружность имеет длину $4n$, а, значит, каждая из $4n$ дуг, на которые она разделена концами $2n$ непересекающихся хорд, имеет длину 1. Важно заметить следующее. Так как хорды не пересекаются, то концы каждой хорды разделяют окружность на дуги нечетной длины.

Обозначим $4n$ точек деления числами 0, 1, 2, …, $4n-1$ последовательно (см. рисунок). Условимся писать $a \equiv b$, если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на $4n$, и говорить, что a и b равны по модулю $4n$. Теперь отметим, что если i, j и k, l – две пары из чисел на окружности, для которых выполняется равенство $i+j \equiv k+l$, то хорды ij и kl параллельны.

Каждая из $2n$ хорд определена парой своих концов: (i_1, i_2), (i_3, i_4), …, (i_{4n-1}, i_{4n}). При этом сумма чисел в каждой паре нечетна.

Допустим, что среди $2n$ хорд нет параллельных. Тогда набор чисел i_1+i_2, i_3+i_4, …, $i_{4n-1}+i_{4n}$ по модулю $4n$ содержит все нечетные числа от 1 до $4n-1$.

Значит, сумма чисел этого набора равна $4n^2$ (по модулю $4n$). Непосредственно суммируя числа набора, мы получим

$$i_1+i_2+i_3+i_4+\ldots+i_{4n-1}+i_{4n} = \\ = 0+1+2+\ldots+4n-1 = 2n(4n-1).$$

Но тогда должно выполняться равенство $4n^2 \equiv 2n(4n-1)$. Легко видеть, что такое равенство не выполняется, т.е. остается заключить, что среди хорд есть параллельные.

В.Произволов

М1770. *Дан многочлен степени 10 с буквенными коэффициентами. Двое поочередно заменяют какую-нибудь букву на число, пока не заменят все буквы. Обозначим полученный многочлен $A(x)$. Пусть $a_1 = \max A(x)$ при x от −1 до 0, $a_2 = \max A(x)$ при x от 0 до +1. Если $a_1 > a_2$, то выиграл первый игрок, если $a_1 < a_2$, то второй. Кто победит при правильной игре?*

Результат игры в основном определяется тем, кто выберет последний коэффициент при нечетной степени. Это будет первый игрок, который может гарантировать свой непроигрыш. Говорить о выигрыше пока рано: может быть, за счет выбора коэффициентов при четных степенях второму игроку удастся добиться, чтобы $\max A(x)$ при x от −1 до +1 был бы при $x = 0$ ($a_1 = a_2$ – ничья). Однако если первый игрок сразу выберет коэффициент при первой степени равным единице, то он гарантирует, что максимума в нуле нет, так как производная не равна нулю.

Затем правильным назначением последнего коэффициента при нечетной степени (это будет достаточно большое по модулю число) первый игрок решительно склонит «чашу весов» в свою сторону. Он обеспечит себе победу независимо от возможных последующих назначений коэффициентов при четных степенях.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

Ф1778. *Человек, стоящий на большом расстоянии h от длинной ровной стены, освещает ее лучом фонарика, вращая фонарик в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω. Как зависит от времени скорость светового пятна, бегущего по стене, с точки зрения этого человека? Нарисуйте график этой зависимости.*

Вначале найдем, чему равна скорость зайчика в точке B (рис.1) с точки зрения наблюдателя, находящегося в этой же точке. Из рисунка видно, что $v = \omega r/\cos\alpha$. Поскольку $\cos\alpha = h/r$,

$$v = \frac{\omega\left(h^2+x^2\right)}{h}.$$

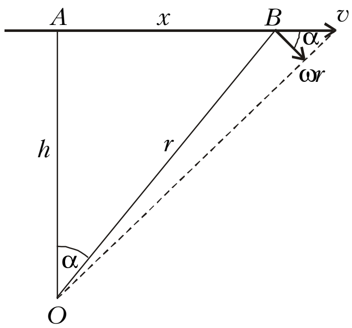


Рис.1

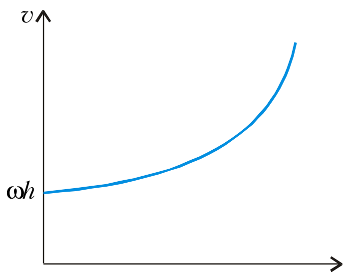


Рис.2

Нарисуем качественно график зависимости $v(x)$. Из рисунка 2 следует, что при $t \to \infty$ (т.е. при $x \to \infty$) $v \to \infty$, т.е. в мгновенной сопутствующей системе отсчета скорость зайчика может быть сколь угодно большой. Это ничему не противоречит. Дело в том, что при движении зайчика не происходит перемещения какого-либо материального объекта из одной точки стены в соседнюю: смещение зайчика вызвано приходом в соседнюю точку стены новой порции световой энергии от прожектора. Разберемся с этим подробнее.

Если прожектор, находящийся в точке O, вращается в одной плоскости, то к моменту, когда свет, испущенный в направлении точки A, достигнет точки D (рис.3,a), прожектор будет светить в

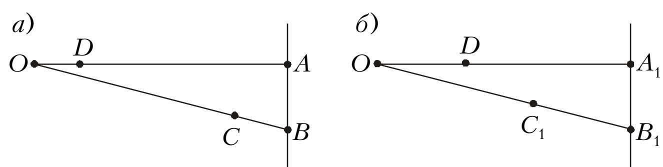


Рис.3

направлении точки B (свет распространяется, естественно, прямолинейно). Поэтому к тому моменту, когда свет дойдет из точки D в точку A, свет, испущенный позднее в направлении точки B, достигнет точки C ($DA = OC$). А еще через некоторое время свет достигнет точки B. Если стена далеко, то $AB > CB$, т.е. скорость движения зайчика больше скорости света (сравните со случаем близко расположенной стены (см. рис.3,б), когда $DA_1 = OC_1$ и $A_1B_1 < C_1B_1$).

Из-за конечности скорости распространения света c наблюдатель, находящийся в точке O, будет видеть зайчик не там, где световое пятно находится в момент наблюдения, а в другой точке – там, где зайчик находился в более ранний момент времени. Примем за ноль отсчета времени момент, когда фонарик испустил свет в направлении OA (см. рис.1). Если в момент времени t фонарик испустил свет в направлении OB (под углом $\alpha = \omega t$), то зайчик в точке B с координатой

$$x = h \operatorname{tg} \omega t \qquad (1)$$

наблюдатель увидит, из-за запаздывания света, в момент времени

$$t_1 = t + \frac{2h}{c \cos \omega t}. \qquad (2)$$

Для нахождения скорости зайчика воспользуемся равенством

$$v = \frac{dx}{dt_1} = \frac{dx/dt}{dt_1/dt}. \qquad (3)$$

Поскольку

$$dx/dt = h\omega/\cos^2 \omega t,\ dt_1/dt = 1 + 2h\omega \sin \omega t/\left(c \cos^2 \omega t\right),$$

то

$$v = \frac{ch\omega}{c \cos^2 \omega t + 2h\omega \sin \omega t}. \qquad (4)$$

Из выражения (4) видно, что при $t \to \pi/(2\omega)$ скорость зайчика $v \approx c/(2 \sin \omega t) \to c/2$. Интересно исследовать ответ при $t < 0$ (отрицательное значение времени отвечает изменению угла α от $-\pi/2$ до $+\pi/2$). При $t \to -\pi/(2\omega)$ из выражения (4) получается странный результат: $v \to -c/2$. На первый взгляд это бессмыслица. Действительно, луч света, посланный в момент времени $t = -\pi/(2\omega)$, пойдет параллельно стене, но не достигнет ее никогда, т.е. зайчика наблюдатель никогда не увидит. Кстати, из равенства (1) следует, что при $t \to -\pi/(2\omega)$ $t_1 \to \infty$. Но ведь фонарик вращается, и рано или поздно наблюдатель должен в первый раз увидеть зайчик. Найдем этот момент времени, обозначив его t_2.

Очевидно, что t_2 – минимально возможное значение времени t_1, определяемое выражением (2). Вычислим производную dt_1/dt и приравняем ее нулю:

$$1 + \frac{2h\omega \sin \omega t}{c \cos^2 \omega t} = 0. \qquad (5)$$

Решая это уравнение, получаем

$$\sin \omega t = \frac{h\omega}{c} - \sqrt{1 + \left(\frac{h\omega}{c}\right)^2}. \qquad (6)$$

Подставив это выражение в формулы (2) и (1), можно найти тот момент времени t_2, когда наблюдатель впервые увидит пятно света в точке с координатой

$$x_2 = -h\sqrt{\frac{\sqrt{1 + (c/(h\omega))^2} - 1}{2}}.$$

В последующие моменты времени наблюдатель будет видеть свет, отраженный стеной как правее, так и левее этой точки, т.е. наблюдатель будет видеть два зайчика, движущихся в противоположные стороны. Другими словами, выражение (2) при $t_1 > t_2$ имеет 2 корня: каждому t_1 отвечают 2 значения t. Зависимость $t_1(t)$ качественно изображена на рисунке 4.

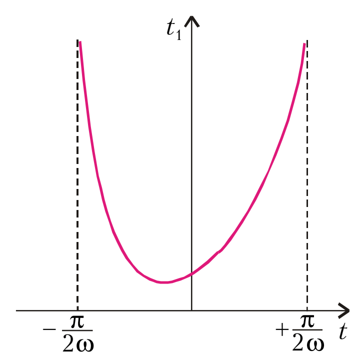


Рис.4

Подставляя равенство (5) в выражение (4), видим, что скорость обоих зайчиков в момент времени t_2 равна бесконечности! Тем самым становится понятным «нелепый» результат предельного перехода при $t \to -\pi/(2\omega)$: при $t_1 \to \infty$ зайчик, бегущий в сторону, противоположную направлению вращения фонарика, имеет скорость $v \to -c/2$.

Явно v через t_1 из уравнений (4) и (2) не выражается: зависимость $v(t_1)$ задана через параметр t. Для построения качественного графика зависимости $v(t_1)$ построим

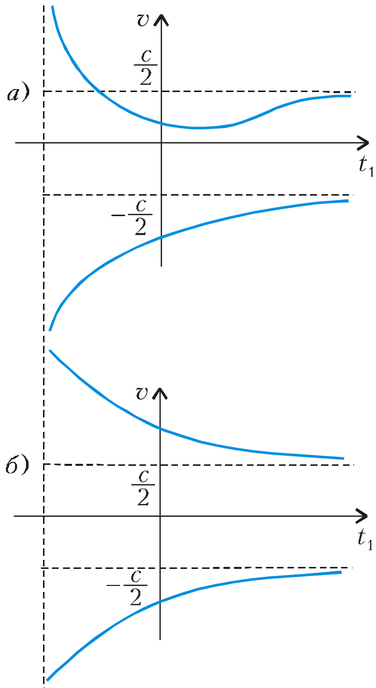


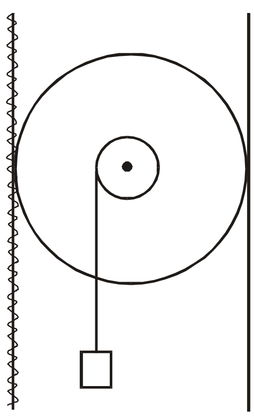
Рис.5

качественные графики зависимостей $v(t)$ и $t_1(t)$ при $-\pi/(2\omega) \le \le t \le +\pi/(2\omega)$, а затем сравним соответствующие моменты времени. Обратите внимание на то, что при $h\omega < c$ и $h\omega > c$ графики $v(t_1)$ выглядят по-разному (см. рис.5,*а* и 5,*б*).

В качестве упражнения читателям предлагается самостоятельно найти минимальную скорость зайчика при $h\omega < c$: она равна $h\omega/\left(1+(h\omega/c)^2\right)$.

В.Шелест

Ф1779. *Две вертикальные параллельные пластины – одна совершенно гладкая, другая очень шероховатая – расположены на расстоянии D друг от друга (см. рисунок). Между ними помещена катушка с внешним диаметром D, вся масса M которой сосредоточена в ее оси. Катушка зажата пластинами так, что может двигаться вниз вращаясь, но не проскальзывая относительно шероховатой пластины. На внутренний цилиндр катушки диаметром d намотана легкая нить, к которой привязан груз массой m. Найдите ускорение этого груза.*



Проскальзывания в точке контакта с шероховатой платиной нет; следовательно, тепло не выделяется. Тогда можно воспользоваться законом сохранения механической энергии.

Найдем связь между скоростью оси катушки и скоростью груза. Для малого угла φ поворота катушки (относительно точки касания с шероховатой пластиной) смещение оси катушки составит

$$\Delta H = \frac{D}{2}\varphi .$$

На внутреннюю часть намотается при этом участок нити длиной $(d/2)\varphi$. С учетом такого укорочения нити смещение груза будет равно

$$\Delta h = \frac{D}{2}\varphi - \frac{d}{2}\varphi = \frac{D-d}{2}\varphi .$$

Видно, что отношение смещений оси катушки и груза получается все время одинаковым — таким же будет отношение их скоростей и ускорений.

Обозначим ускорение оси a, тогда ускорение груза будет $a(D-d)/D$. Будем считать ускорение a постоянным, в этом случае за время τ от начала движения ось катушки опустится на $a\tau^2/2$ и наберет скорость $a\tau$. Для груза, соответственно, смещение будет $a(1-d/D)\tau^2/2$, а скорость $a(1-d/D)\tau$. Из энергетических соображений запишем

$$Mg\frac{a\tau^2}{2} + mg\frac{a(1-d/D)\tau^2}{2} = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{m\left(a(1-d/D)\tau\right)^2}{2} .$$

Отсюда находим ускорение оси катушки:

$$a = g\frac{M + m(1-d/D)}{M + m(1-d/D)^2}$$

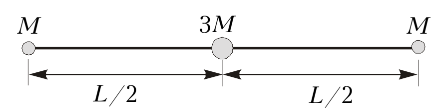
и ускорение груза:

$$a_{\text{гр}} = g\left(1-\frac{d}{D}\right)\frac{M + m(1-d/D)}{M + m(1-d/D)^2} .$$

З.Рафаилов

Ф1780. *В глубоком космосе, вдали от всех тяготеющих масс, находятся три тела малых размеров, массы которых M, M и 3M. Как они могут двигаться, чтобы расстояния между любыми двумя телами оставались все время постоянными и не превышали по величине L?*

Из условия видно, что каждое из тел должно вращаться по окружности вокруг общего центра масс, который может двигаться прямолинейно и равномерно (или покоиться). Из симметрии понятно, что тела должны находиться в вершинах равнобедренного треугольника, при этом должны выполняться условия для суммарных сил — их направления «смотрят» в центр масс, а величины соответствуют равномерному вращению каждого из тел. Первое условие для сил выполняется для двух конфигураций тел — равносторонний треугольник и «три тела в линию». Второе условие выполняется только для линейной конфигурации. (Проверьте оба утверждения самостоятельно.)



Итак (см. рисунок): большое тело имеет нулевое ускорение, а для одного из малых тел суммарная сила равна

$$F = G\frac{M\cdot 3M}{(L/2)^2} + G\frac{M\cdot M}{L^2} = 13G\frac{M^2}{L^2} .$$

Тогда из уравнения

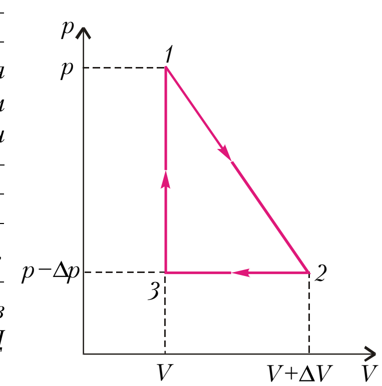
$$F = M\omega^2\frac{L}{2}$$

находим частоту вращения:

$$\omega = \sqrt{\frac{26GM}{L^3}} .$$

Р.Александров

Ф1781. *Порция гелия в циклическом процессе вначале адиабатически расширяется, при этом температура газа уменьшается от 500 К до 499 К, затем сжимается изобарически до первоначального объема и, наконец, нагревается изохорически до первоначальной температуры. Найдите наименьшее значение температуры в этом цикле, а также КПД цикла.*



Процесс изображается на pV-диаграмме (см. рисунок) в виде очень маленького прямоугольного треугольника (гипотенуза — не совсем прямая, но отличие от кривой невелико). На участке *1–2* (адиабата)

$$\Delta U_{12} = -A_{12},\ \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1),\ A_{12} = p\Delta V.$$

Для состояния *1*

$$pV = \nu RT_1,$$

для состояния *2*

$$(p - \Delta p)(V + \Delta V) = \nu RT_2.$$

Отсюда получаем

$$p\Delta V = 1{,}5\nu R\Delta T,\ V\Delta p = 2{,}5\nu R\Delta T,$$

где $\Delta T = T_1 - T_2 = 1$ К. Тогда в состоянии *3*

$$(p - \Delta p)V = \nu RT_3, \text{ и}$$

$$T_3 = \frac{pV}{\nu R} - \frac{V\Delta p}{\nu R} = T_1 - 2{,}5\Delta T = 497{,}5\ \text{К}.$$

Это и есть минимальная температура в этом цикле.
Найдем теперь КПД цикла. Газ получает тепло только на участке *3–1*. В этом случае

$$Q = \Delta U_{31} = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3).$$

Работа в цикле находится по площади треугольника:

$$A = \frac{1}{2}\Delta p\Delta V.$$

Тогда КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{0{,}5\Delta p\Delta V}{1{,}5\nu R\cdot 2{,}5\Delta T} = \frac{0{,}5\cdot p\Delta V\cdot V\Delta p}{1{,}5\nu R\cdot 2{,}5\Delta T\cdot pV} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot 1{,}5\nu R\Delta T\cdot 2{,}5\nu R\Delta T}{1{,}5\nu R\cdot 2{,}5\Delta T\cdot \nu RT_1} = \frac{0{,}5\Delta T}{T_1} = \frac{1}{1000} = 0{,}1\%.$$

З.Циклов

Ф1782. *В упрощенной модели гимназии школьники изображаются цилиндрами одной и той же высоты. Площадь зала для отдыха гимназистов на перемене составляет 200 м^2. На этой площади хаотически расположены 100 десятиклассников диаметром 0,5 м каждый; они практически неподвижны. Пятиклассник половинного диаметра бегает по залу со скоростью 3 м/с. Натыкаясь на десятиклассника, он набивает себе шишку, но после отражения продолжает свое движение. Оцените, сколько шишек он себе набивает за перемену длительностью 15 минут.*

Общая «площадь» старшеклассников составляет $N\cdot \pi D^2/4 \approx 20$ м^2. Это существенно меньше площади зала, поэтому «длина свободного пробега» гимназиста получается достаточно большой (по сравнению с размерами цилиндров). Дальше применим обычное рассуждение: чтобы удар произошел, центр неподвижного цилиндра должен находиться от линии движения не дальше чем на $(D+d)/2$. Тогда «заметаемая» за время τ площадь равна $v_0\tau\cdot 2(D+d)/2 = v_0\tau(D+d)$. На этой площади произойдет

$$N\cdot\frac{v_0\tau(D+d)}{S} = 100\cdot\frac{3\cdot 15\cdot 60\cdot(0{,}5+0{,}25)}{200} \approx 1000$$

ударов. Ясно, что ответ приближенный, но считать точнее просто не имеет смысла — модель расчета довольно грубая.

М.Учителев

Ф1783. *Два одинаковых точечных заряда Q находятся на расстоянии d друг от друга. Какой потенциал может иметь эквипотенциальная поверхность, если она охватывает оба заряда? Какой потенциал должна иметь такая поверхность, чтобы быть всюду выпуклой?*

Первый вопрос довольно простой. Ясно, что эквипотенциальные поверхности высокого потенциала (около зарядов) охватывают каждый из зарядов «по отдельности». Критической точкой будет середина отрезка, соединяющего заряды, т.е. точка A (рис.1). Потенциал этой точки равен

$$\varphi_A = 2k\frac{Q}{0{,}5d} = 4k\frac{Q}{d}.$$

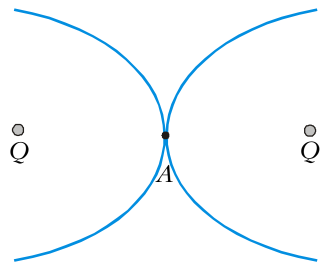


Рис.1

Поверхности меньшего потенциала должны охватывать оба заряда.
Разберемся теперь со вторым вопросом. Рассмотрим точку $Б$ на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему заряды (рис.2). Ясно, что направление поля в точке $Б$ совпадает с направлением этого перпендикуляра. Отойдем теперь на малое расстояние x параллельно линии QQ – в точку $В$. Если эквипотенциальная поверхность в точке $Б$ выпуклая (точка $Б$ — это «критическая» точка), то потенциал в точке $В$ должен быть меньше, чем в точке $Б$. Для нахождения «крайней» поверхности эти потенциалы нужно приравнять. В этом случае полная напряженность в точке $В$ должна быть параллельна $АБ$ (и в точках между $Б$ и $В$ тоже). Так будет, если составляющая напряженности вдоль линии QQ не будет зависеть от x. Отсюда получаем

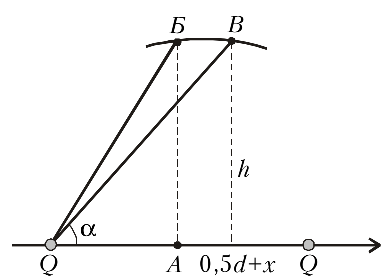


Рис.2

$$E_{\parallel} = E\cos\alpha =$$

$$= k\frac{Q}{h^2 + (0{,}5d + x)^2}\frac{0{,}5d + x}{\sqrt{h^2 + (0{,}5d + x)^2}} = \text{const}.$$

Для малых x (а нас именно такие x и интересуют) выражение можно упростить:

$$E_{\parallel} = \frac{kQ\cdot 0{,}5d\left(1 + \frac{2x}{d}\right)}{\left(h^2 + (0{,}5d)^2\right)^{3/2}\left(1 + \frac{dx}{h^2 + 0{,}25d^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{kQ\cdot 0{,}5d}{\left(h^2 + (0{,}5d)^2\right)^{3/2}}\frac{1 + \frac{2x}{d}}{1 + \frac{1{,}5dx}{h^2 + 0{,}25d^2}}.$$

Ясно, что для выполнения нашего условия нужно следующее:

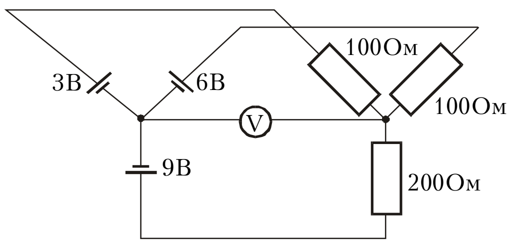
$$\frac{2}{d} = \frac{1{,}5d}{h^2 + 0{,}25d^2}, \text{ или } 2h^2 = d^2.$$

При этом потенциал выпуклой поверхности будет равен

$$\varphi_Б = 2k\frac{Q}{\sqrt{h^2 + d^2/4}} = \frac{4k}{\sqrt{3}}\frac{Q}{d} = \frac{\varphi_A}{\sqrt{3}}.$$

С.Кротов

Ф1784. *Батарейки напряжениями 3 В, 6 В и 9 В соединены «минусами», а положительные их выводы свободны – такое соединение называют «звездой». К ним подключают «звезду» из резисторов сопротивлениями 100 Ом, 100 Ом и 200 Ом, как показано на рисунке.*



Что покажет вольтметр с большим сопротивлением, если его включить между общими точками «звезд»? Заменим вольтметр амперметром, имеющим очень малое сопротивление. Что он покажет? Заменим амперметр резистором, имеющим сопротивление 17 Ом. Какой ток через него потечет?

Будем измерять все потенциалы относительно левой точки соединения — обозначим ее A (т.е. примем точку A за «нулевую»). Для случая с идеальным вольтметром все просто: пусть он покажет U, тогда потенциал второй точки соединения — точки $Б$ — равен $+U$, и можно выразить токи через резисторы, учитывая, что сумма втекающих токов равна сумме вытекающих токов. Будем считать все токи втекающими — это вполне можно делать, просто какие-то токи окажутся при этом отрицательными. Получаем уравнение для определения U:

$$\frac{U_1 - U}{R_1} + \frac{U_2 - U}{R_2} + \frac{U_3 - U}{R_3} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{3 - U}{100} + \frac{6 - U}{100} + \frac{9 - U}{200} = 0,$$

откуда $U = 5{,}4$ В.

Для случая с идеальным амперметром все тоже просто: потенциал точки $Б$ оказывается нулевым, тогда показание амперметра будет

$$I = \frac{U_1 - 0}{R_1} + \frac{U_2 - 0}{R_2} + \frac{U_3 - 0}{R_3} = 0{,}135\,\text{А}.$$

Для случая с резистором сопротивлением R: обозначим потенциал точки $Б$ буквой φ, тогда

$$\frac{U_1 - \varphi}{R_1} + \frac{U_2 - \varphi}{R_2} + \frac{U_3 - \varphi}{R_3} = \frac{\varphi - 0}{R}.$$

Отсюда

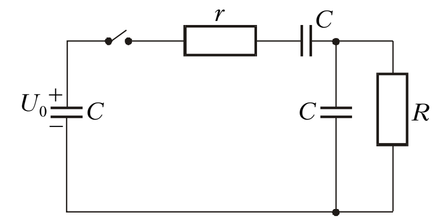
$$\varphi \approx 1{,}6 \text{ В},$$

и через резистор течет ток

$$I_R = \frac{\varphi}{R} \approx 0{,}095 \text{ А}.$$

Р.Схемов

Ф1785. *Три одинаковых конденсатора емкостью C = = 1000 мкФ каждый, ключ и два резистора сопротивлениями r = 10 Ом и R = 10 кОм собраны в схему, приведенную на рисунке. Один из конденсаторов заряжен до напряжения U_0. Замкнем ключ. Какое количество теплоты выделится за первую секунду в резисторе сопротивлением r? Какое количество теплоты выделится в нем за последующие 100 секунд? Элементы цепи считать идеальными.*



После замыкания ключа незаряженные вначале конденсаторы быстро (за несколько сотых долей секунды, поскольку так называемая постоянная времени равна $\tau = rC = 0{,}01$ с) заряжаются до напряжения $U/3$ каждый, через резистор сопротивлением R проходит за это время очень небольшой заряд, и мы им пренебрежем — как будто резистора R вообще нет. Тогда из баланса энергий найдем количество теплоты, выделившееся в резисторе сопротивлением r за первую секунду:

$$Q_1 = \frac{1}{2}CU_0^2 - \left(\frac{1}{2}C\cdot\left(\frac{2}{3}U_0\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}C\cdot\left(\frac{1}{3}U_0\right)^2\right) = \frac{1}{6}CU_0^2.$$

За следующие 100 секунд конденсатор, к которому подключен резистор сопротивлением R, практически полностью разрядится, а первоначальный заряд CU_0 распределится поровну между оставшимися двумя конденсаторами. Тогда полное выделившееся количество теплоты будет равно

$$Q = \frac{1}{3}CU_0^2 - \frac{1}{4}CU_0^2 = \frac{1}{12}CU_0^2.$$

Часть этого тепла выделится в резисторе R, остальное — в резисторе r. Найдем эти доли. При разряде конденсаторов через резистор R по резистору r течет маленький ток, так что падением напряжения на r можно пренебречь — тогда напряжение на последовательно соединенных конденсаторах C_1 и C_2 практически равно напряжению на конденсаторе C_3. Это означает, что за то время, пока конденсатор C_3 теряет заряд q, конденсаторы C_1 и C_2 отдают $q/2$, а через резистор R при этом протекает заряд $3q/2$. Итак, ток через резистор r в любой момент в 3 раза меньше, чем через резистор R, поэтому отношение тепловых мощностей равно 1:9000. Таким образом, в резисторе r в течение второго промежутка времени выделится количество теплоты

$$Q_2 = \frac{(1/12)CU_0^2}{9001} \approx \frac{CU_0^2}{108000}.$$

А.Старов

Ф1786. *На рисунке 1 приведена схема, собранная из катушки индуктивностью 1 Гн, конденсатора емкостью 1 мкФ, идеального амперметра и двух резисторов*

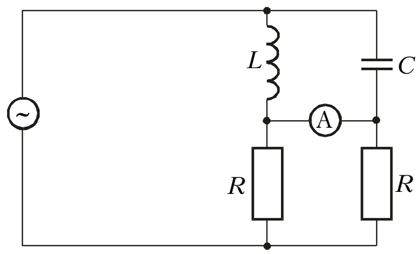


Рис.1

сопротивлениями по 100 Ом. Схема подключена к источнику переменного напряжения $U = 100\cos 1000t$. Найдите показание амперметра.

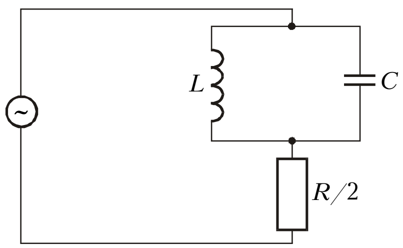


Рис.2

Перерисуем схему с учетом идеальности амперметра (рис.2). Простой расчет показывает, что параллельный контур настроен в резонанс — числа в условии соответствующим образом подобраны. У такого контура сопротивление очень велико, напряжение источника практически полностью приложено к контуру, а напряжения (и токи) резисторов совсем малы. Тогда

$$I_L = \frac{U_0}{\omega L} = 0{,}1\ \text{А} \ \text{и} \ I_C = \frac{U_0}{1/(\omega C)} = 0{,}1\ \text{А}.$$

Токи эти противоположны по фазе. Учитывая малость токов через резисторы, получим

$$I_\text{А} = I_L = I_C = 0{,}1\ \text{А}.$$

Но это — амплитудное значение, а амперметры обычно градуируют в расчете на действующие (эффективные) значения. Тогда показание амперметра таково:

$$I_\text{а} = \frac{I_\text{А}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}07\ \text{А}.$$

З.Рафаилов

Ф1787. *Плоская световая волна, ее длина волны 0,55 мкм соответствует зеленому цвету, падает перпендикулярно на плоский непрозрачный экран, в котором проделано круглое отверстие. На расстоянии 0,2 м находится лист бумаги, расположенный параллельно экрану. При каком диаметре отверстия будет макси-*

Всем читателям журнала «Квант»! Срочно!
Спешим сообщить вам радостную новость. После большого перерыва возобновилась жизнь Библиотечки «Квант». Сформирована новая редакционная коллегия и прошло ее первое заседание.
Редколлегия и издательство «Бюро Квантум», взявшее на себя ответственность за выпуск книг серии «Библиотечка «Квант», полны решимости вернуть Библиотечке ее былую славу.
Уже вышли в свет две первые книги, впереди - много интересных книг для любителей физики и математики.

А теперь — более подробно.

У многих любителей физики и математики сохранились на полках отдельные книги популярной серии «Библиотечка «Квант». За 15 лет, начиная с 1980 года, вышли 85 книг этой серии. Среди них − книги о современных и классических достижениях физики и математики, написанные учеными, работающими на переднем крае науки, материалы различных олимпиад, книги по истории науки и многое другое. Большинство этих книг, несмотря на гигантские (по сегодняшним меркам) тиражи, давно стали библиографической редкостью.

На первом заседании редколлегии серии «Библиотечка «Квант» было отмечено, что прекращение на долгие годы выпуска книг этой серии имело негативные последствия для развития физико-математического образования в нашей стране. Регулярный выпуск книг Библиотечки снова будет способствовать живой связи между наукой и образованием, помогать талантливым школьникам развивать свои научные способности и интерес к науке; он должен вернуть всем ценителям интеллектуальных открытий непередаваемое ощущение увлекательного путешествия за знаниями.

В планах редколлегии и издательства как обновленное издание лучших книг серии, дополненное (где это возможно и необходимо) сведениями о самых последних достижениях и открытиях, так и подготовка совершенно новых книг.

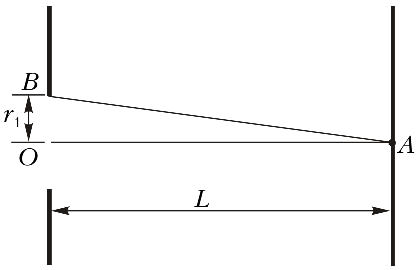
Уже поступили в продажу два свежих выпуска: выпуск 86 − обновленное издание замечательной книги И.Ш.Слободецкого и Л.Г.Асламазова «Задачи по физике» и выпуск 87 − сборник материалов под названием «Физика и …», посвященный связи физики с разными областями науки и деятельности человека. В этом году читатели получат еще две книги — книгу А.В.Спивака «Математический праздник» и книгу П.В.Блиоха «Радиоволны на земле и в космосе». В последующие годы предполагается выпускать по 6 − 8 книг.

Не упустите уникальную возможность приобрести вышедшие книги или сделать заказ на будущие книги серии «Библиотечка «Квант» прямо сегодня и непосредственно в помещении редакции. Завтра может быть уже поздно. Особенно приглашаются к сотрудничеству (на выгодных условиях) оптовые покупатели.

Мы будем рады ответить на все ваши вопросы по телефонам: 930-36-32, 930-56-48, 930-56-41.

мальной освещенность в самой близкой к центру отверстия точке листа бумаги? При каком диаметре отверстия будет максимальной освещенность этой точки одновременно для длин волн 0,4 мкм и 0,7 мкм?

Если понемногу увеличивать радиус отверстия r, начиная с очень малых значений, то освещенность в самой близкой к центру отверстия точке листа — точке A — сначала будет увеличиваться. Однако начиная с некоторого значения r_1 увеличение освещенности прекратится — это произойдет в тот момент, когда разность хода лучей будет равна половине длины волны света (см. рисунок):



$$BA - OA = \frac{\lambda}{2}, \text{ т.е. } \sqrt{r_1^2 + L^2} - L = \frac{\lambda}{2},$$

$$\text{или } L\left(1 + \frac{r_1^2}{L^2}\right)^{1/2} - L = \frac{\lambda}{2}.$$

Учитывая, что $r_1 \ll L$, получим

$$\frac{r_1^2}{2L^2} = \frac{\lambda}{2}, \text{ и } r_1 = \sqrt{\lambda L} \approx 0{,}33 \text{ мм}.$$

При дальнейшем увеличении радиуса отверстия освещенность будет падать, потом снова расти, и т.д. В общем, n-й максимум наступает при радиусе отверстия

$$r_n = \sqrt{\lambda L(2n+1)}.$$

Теперь нужно подобрать такой радиус отверстия r, чтобы получить условие максимума для двух длин волн: 0,4 мкм и 0,7 мкм (очевидно — за счет разных номеров максимумов). Дело облегчается тем, что радиус можно брать довольно грубо приближенным — близкие к r_n части отверстия почти ничего не прибавляют к освещенности. Итак,

$$\sqrt{\lambda_1 L(2n_1+1)} \approx \sqrt{\lambda_2 L(2n_2+1)},$$

или

$$0{,}4(2n_1+1) \approx 0{,}7(2n_2+1).$$

Например,

$$0{,}4 \cdot 5 = 2 \approx 0{,}7 \cdot 3 = 2{,}1.$$

Тогда

$$r_{\lambda_1} = \sqrt{0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2 \cdot 5} \text{ м} \approx 0{,}63 \text{ мм},$$

$$r_{\lambda_2} = \sqrt{0{,}7 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}2 \cdot 3} \text{ м} \approx 0{,}65 \text{ мм},$$

т.е.

$$r \approx 0{,}64 \text{ мм}.$$

Разумеется, искомые диаметры будут в 2 раза превышать найденные радиусы.

А.Зильберман

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2000 года

I место заняли

по математике

Шабанов Александр – с. Садовое Воронежской обл., школа 1;

по физике

Однороженко Денис – г. Радужный Владимирской обл., школа 2.

II место заняли

по математике

Нестерук Владимир – Украина, Киев, лицей «Научная смена»;

по физике

Ольшевский Вячеслав – Украина, Винница, школа 34.

III место заняли

по математике

Байденко Борис – Украина, Киев, Киево-Печерский лицей «Лидер»;

по физике

Муравьев Вячеслав – Смоленск, Смоленская гимназия.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Галкин Никита – Украина, Макеевка, Донецкий колледж,
Ленский Тимур – Таганрог, школа 24,
Войтенко Андрей – Украина, Донецк, Донецкий колледж;

по физике

Седельников Михаил – Крым, Севастополь, школа-гимназия 1,
ЗольниковДмитрий – Ульяновск, школа 20,
Воробушков Василий – Иваново, лицей 33.

Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за первое полугодие 2001 года.