

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2002 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1786» или «Ф1793». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задача М1786 предлагалась на московском отборе на XXVII Всероссийскую математическую олимпиаду, задачи М1792–М1794 – на самой этой олимпиаде.

Задачи Ф1793, Ф1797 и Ф1801 предлагались в этом году на Московской физической олимпиаде, а задачи Ф1795 и Ф1798 – на XXXV Всероссийской физической олимпиаде.

Задачи М1786–М1795, Ф1793–Ф1802

М1786. На плоскости отмечено шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, причем все попарные расстояния между ними различны. Докажите, что среди треугольников с вершинами в этих точках найдутся два треугольника с общей стороной такой, что для одного эта сторона является наибольшей, а для другого – наименьшей.

С. Рукшин

М1787*. Пусть p и q – натуральные числа, большие 1. Известно, что $q^3 - 1$ делится на p , а $p - 1$ делится на q . Докажите, что $p = q^{3/2} + 1$ или $p = q^2 + q + 1$.

Н. Осипов

М1788. В треугольнике ABC точка I – центр вписанной окружности, A', B', C' – точки ее касания со сторонами BC, CA, AB (рис.1). Прямые AA' и BB' пересекаются в точке P , AC и $A'C'$ – в точке M , BC и $B'C'$ – в точке N . Докажите, что прямые IP и MN перпендикулярны.

А. Заславский

М1789. а) Из ста гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 100 г выбирается набор в 50 гирек, общая масса которых равна общей массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 50 г. Докажите, что в

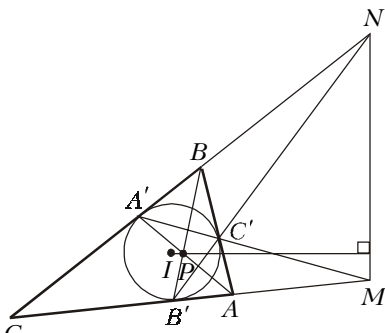


Рис.1

наборе найдутся две гирьки, общая масса которых равна 101 г.

б) Из двухсот гирек с массами 1 г, 2 г, 3 г, ..., 200 г выделяется набор в 100 гирек, общая масса которых равна массе оставшихся. При этом никакие две гирьки набора не различаются на 100 г и не дают вместе 201 г. Докажите, что 50 минимальных гирек набора составляют вместе 2525 г.

В. Произволов

М1790. Имеются в некотором количестве равносторонние треугольники, у каждого из которых одна сторона желтая, другая красная, а третья синяя. Можно прикладывать треугольники друг к другу одноцветными сторонами или участками одноцветных сторон. Таким образом составлен большой равносторонний треугольник Δ .

Докажите, что суммарная длина участков границы треугольника Δ каждого из трех цветов одна и та же.

С. Волченков

М1791. а) На плоскости расположены 5 окружностей, любые четыре из которых имеют общую касательную. Обязательно ли все 5 окружностей имеют общую касательную?

б) На плоскости расположены n окружностей, любые 5 из которых имеют общую касательную. Докажите, что все n окружностей имеют общую касательную.

В. Произволов

М1792. В компании из $2n + 1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

С. Берлов

М1793*. В магическом квадрате $n \times n$, составленном из чисел $1, 2, \dots, n^2$, центры любых двух клеток соединили вектором в направлении от большего числа к меньшему. Докажите, что сумма всех полученных векторов равна нулю. (Магическим называется клетчатый квадрат, в клетках которого записаны числа так, что суммы чисел во всех его строках и столбцах равны.)

И. Богданов

М1794. На прямой выбрано 100 множеств A_1, A_2, \dots, A_{100} , каждое из которых является объединением 100 попарно непересекающихся отрезков. Докажите, что пересечение множеств A_1, A_2, \dots, A_{100} является объединением не более 9901 попарно непересекающихся отрезков. (Точка также считается отрезком.)

Р. Карасев

М1795. На сфере S определена непрерывная функция $y = f(X)$, $X \in S$. Докажите, что найдется такое значение y_0 , которое функция f принимает на каждой большой окружности сферы S . (Окружность на сфере является большой, если ее центр совпадает с центром сферы.)

В. Произволов

Ф1793. Снаряд вылетел из ствола орудия под углом $\alpha = 3^\circ$ со скоростью $v = 10000$ м/с. Оцените, на каком расстоянии L от орудия он упадет на Землю. Сопротивлением воздуха и вращением Земли при расчете пренебречь.

А. Андрианов

Ф1794. По гладкой горизонтальной поверхности скользит гантелька – легкий жесткий стержень длиной L , на концах которого закреплены точечные массы M и $2M$. В некоторый момент скорость легкого конца равна по величине v , а скорость тяжелого конца в два раза больше. Какой может быть сила натяжения стержня при движении гантельки?

З. Рафаилов

Ф1795. Центр тяжести спортивного автомобиля находится на равных расстояниях от передних и задних колес. Если при торможении зажимать колодками только задние колеса, то длина тормозного пути оказывается L_1 , если только передние – то L_2 (при той же начальной скорости автомобиля). Найдите длину тормозного пути в том случае, когда колодками зажимают и передние и задние колеса.

В. Слободянин

Ф1796. На гладком горизонтальном столе находится куб из пенопласта массой $M = 40$ г. В него попадает ледяная пуля массой $m = 10$ г, летящая перед ударом горизонтально со скоростью $v = 100$ м/с. Должно быть, у пули центр тяжести был смещенным – она вылетела через верхнюю грань куба, причем канал на выходе при осмотре оказался перпендикулярным верхней плоскости куба. Пуля после вылета не долетела до потолка. Считая начальные температуры пули и куба равными 0°C , оцените массу растаившего льда.

А. Простов

Ф1797. В сосуд, заполненный воздухом под давлением $p_0 = 1$ атм при температуре $t_0 = -23^\circ\text{C}$, поместили маленькую льдинку, после чего герметично его закрыли.

Затем сосуд нагрели до температуры $t_1 = 227^\circ\text{C}$, и оказалось, что давление в нем повысилось до $p_1 = 3$ атм. Какова будет относительная влажность воздуха в сосуде после его охлаждения до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$?

М. Семенов

Ф1798. Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли обрывок рукописи, на котором был изображен замкнутый цикл для $\nu = 1$ моль гелия в координатах p, V (рис.2). Цикл состоял из изотермы 1–2, изохоры 2–3 и адиабаты 3–1. КПД данного цикла $\eta = 0,125$. Масштаб по оси объема: 1 дел = 0,5 л, по оси давления: 1 дел = $5 \cdot 10^3$ Па. Найдите объем газа в изохорическом процессе. На рисунке ось давления вертикальна, а ось объема горизонтальна.

А. Шеронов

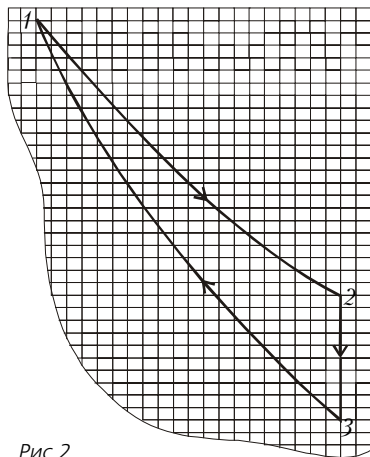


Рис.2

Ф1799. Два очень длинных параллельных медных проводника расположены на расстоянии 1 м друг от друга. Они соединены перемычками из такого же провода, причем соседние перемычки составляют углы 60° друг с другом и с проводами (рис.2). Считая сопротивление 1 метра провода равным 1 Ом, найдите сопротивление, измеренное между точками А и В.

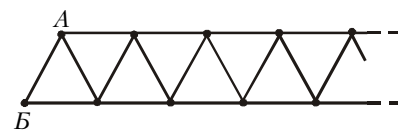


Рис.3

Ф1800. Параллельный колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис.4). Последовательно с контуром включен конденсатор емкостью $2C$. К концам получившейся цепочки в некоторый момент подключают батарейку напряжением U_0 . Найдите максимальное значение силы тока через катушку и максимальное напряжение на конденсаторе емкостью C . Сопротивление проводов невелико, элементы цепи можно считать идеальными.

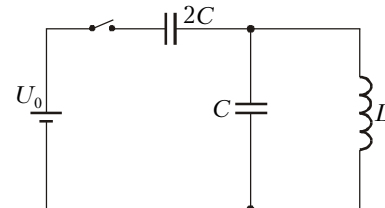


Рис.4

А. Зильберман

Ф1801. Два груза массой m каждый подвешены к горизонтальному потолку с помощью двух невесомых и нерастяжимых нитей длиной l_1 и l_2 соответственно (рис.5). Грузы соеди-

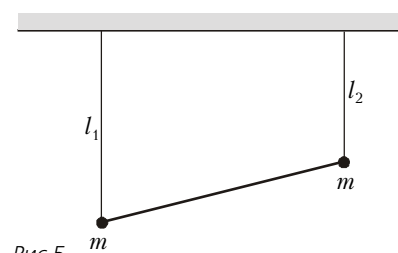


Рис.5

