Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый тур

1. Вдоль правой стороны дороги припаркованы 100 машин. Среди них 30 красных, 20 желтых и 20 розовых мерседесов. Известно, что никакие два мерседеса разного цвета не стоят рядом. Докажите, что тогда какие-то три мерседеса, стоящие подряд, одного цвета. (7)

К.Кохась

2. В лавке можно обменять шило на мыло, или 3 мыла на 1 шило, или 1 мыло на 4 шила (но не наоборот). После нескольких обменов у Сережи оказалось столько же шила и мыла, сколько было вначале. Докажите, что количество сделанных обменов делится на 16. (8)

С.Иванов

3. Федя и Наташа стартуют с одного и того же места и равномерно движутся по прямой линии в одном направлении. Федя спокойно идет, а Наташа бежит. Пробежав 400 своих шагов, Наташа поворачивает обратно. В этот момент Федя начинает считать свои шаги и насчитывает до встречи с Наташей 100 (своих) шагов. Чьи шаги длиннее: идущего Феди или бегущей Наташи? (9)

Ф.Назаров

4. Можно ли бумажный прямоугольник размера 103×49 разрезать «по клеточкам» на несколько прямоугольников, каждый из которых имеет размеры 7×9, 7×14 или 9×14? (10)

Ф.Бахарев, С.Иванов

5. Вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ расставлены по кругу. При этом сумма любых трех стоящих подряд чисел не меньше 2, а сумма любых пяти стоящих подряд чисел не превосходит 4. Какое наибольшее значение может принимать разность $a_1 - a_2$? (Не забудьте привести пример, когда эта разность достигает наибольшего значения.) (11)

Е.Сопкина

В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.

Второй тур

6. На одной стороне улицы разбитых фонарей стояло 150 фонарей, причем среди любых трех фонарей, стоявших подряд, хотя бы один был разбит. После того как электрик Петров починил несколько фонарей, среди любых четырех фонарей, стоявших подряд, осталось не более одного разбитого. Докажите, что электрик починил не менее 25 фонарей. (6)

К.Кохась

7. На Васиной чаше двухчашечных весов лежат гири массами 1 г, 3 г,… …, 2001 г, на Петиной чаше – 2 г, 4 г, …, 2000 г. Первым ходит Вася – он убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Петиной. Потом Петя убирает по одной гире со своей чаши до тех пор, пока она не станет легче Васиной. Затем опять ходит Вася, потом Петя, и так далее. Выигрывает тот, кто первым сможет убрать все гири со своей чаши. Кто выигрывает при правильной игре? (6)

Ю.Лифшиц

8. Шестизначное число, делящееся на 9, умножили на 111111. Докажите, что десятичная запись произведения содержит хотя бы одну девятку. (7)

А.Храбров

9. Клетки черно-белой доски 12×12 раскрашены в шахматном порядке. Разрешается взять любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: черные клетки – в зеленый цвет, зеленые – в белый, белые – в черный. Какое наименьшее число таких операций потребуется, чтобы получить «противоположную» бело-черную шахматную раскраску? (7)

К.Кохась

10. Натуральные числа u и v таковы, что для любого натурального k числа $ku + 2$ и $kv + 3$ имеют общий натуральный делитель, больший 1. Чему может быть равно отношение u/v? (8)

А.Голованов, Д.Карпов, А.Пастор

11. Колоду карточек с числами от 1 до 78 дают зрителю. Тот ее перемешивает, отбирает 40 карточек, отдает их первому фокуснику, а остальные оставляет себе. Первый фокусник выбирает из полученных карточек две и возвращает их зрителю. Зритель добавляет к этим карточкам одну карточку из своих тридцати восьми и, перемешав, отдает эти три карточки второму фокуснику. Второй фокусник показывает, какая из карточек была добавлена зрителем. Объясните, как может быть показан такой фокус. (8)

К.Кохась

12. Все клетки доски 10×10 покрашены в белый цвет. Федя и Юра по очереди (начинает Федя) перекрашивают по одной белой клетке в черный цвет. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется двух соседних по стороне белых клеток. Кто выигрывает при правильной игре? (9)

А.Храбров

13. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AB = BC$, $CD = DE$ и $\angle A = \angle C = \angle E < 90^\circ$. Докажите, что этот пятиугольник – описанный. (9)

Ф.Бахарев

14. Точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. На средних линиях C_1B_1 и A_1B_1 отмечены точки E и F соответственно так, что прямая BE содержит биссектрису угла AEB_1, а прямая BF – биссектрису угла CFB_1. Докажите, что биссектрисы углов ABC и FBE совпадают. (9)

Ф.Бахарев

15. На биссектрисе AL треугольника ABC выбрана точка K, причем $\angle BKL = \angle KBL = 30^\circ$. Прямые AB и CK пересекаются в точке M, а прямые AC и BK – в точке N. Найдите угол AMN. (10)

Д.Ширяев, С.Берлов

16. В парламенте страны Альтернативии для любых двух депутатов найдется третий, знакомый ровно с одним из них. Каждый депутат состоит в одной из двух правящих партий. Ежедневно президент приказывает некоторой группе депутатов перейти в другую партию, при этом все депутаты, знакомые хотя бы с одним из депутатов группы, тоже меняют свою партийную принадлежность. Докажите, что президент может добиться того, чтобы все без исключения депутаты Альтернативии перешли в ту партию, которую поддерживает он сам. (Президент не является членом парламента.) (10)

С.Берлов

17. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство

$$[m,n]+[m+1,n+1]>\frac{2mn}{\sqrt{n-m}},$$

где $[x,y]$ – наименьшее общее кратное чисел x и y. (11)

А.Голованов

18. Найдите все такие функции $f:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}$, что для любых целых x и y выполняется соотношение $f(x+y+f(y))=f(x)+2y$. (11)

Ф.Петров

19. Из таблицы 20×20 вырезали прямоугольники 1×20, 1×19, … …, 1×1. Докажите, что наибольшее количество прямоугольников 1×2, которое заведомо можно вырезать из оставшейся части таблицы, равно 85. (11)

С.Берлов, А.Храбров

Отборочный тур

20. На доске написано натуральное число. Два игрока ходят по очереди, и каждый своим ходом заменяет написанное на доске число n числом $n-1$ или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Выигрывает тот, кто первым напишет на доске число 1. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер, если в начале игры число на доске равно 1000000? (9–10)

О.Ванюшина

21. В шахматном клубе посетители могут играть в шахматы друг с другом или с компьютером. Вчера в клубе было n человек, каждый из них сыграл не более n партий, и любые двое, не игравшие друг с другом, сыграли в сумме не более n партий. Докажите, что всего было сыграно не более $\frac{n(n+1)}{2}$ партий. (9–10)

А.Федотов