Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Удивительные катки» предназначена девятиклассникам, заметка «Как чайник стал таймером» – десятиклассникам и «Кто-то приближается?» – одиннадцатиклассникам.

Удивительные катки

Б.КОГАН

Представьте себе доску, которая движется на круглых катках (сейчас опять в моду вошли самокаты – *прим. ред.*). При этом она сохраняет горизонтальное положение и остается на одной и той же высоте. Почему это происходит? Да потому, что окружность имеет одну и ту же ширину при любом повороте.

А будет ли доска двигаться так же, если воспользоваться некруглыми катками? В первый момент кажется, что это невозможно. Не будем, однако, спешить. Оказывается, есть кривые, которые, подобно окружности, имеют одинаковую ширину во всех направлениях. Они так и называются линиями одинаковой ширины.

Одна из простейших кривых такого рода показана на рисунке 1. Она со-

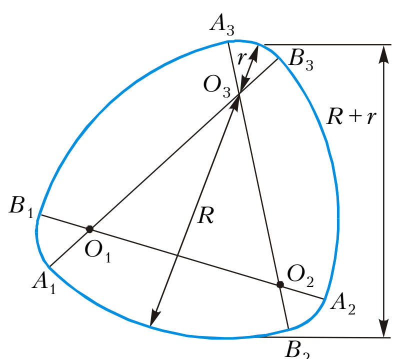

Рис. 1

стоит из дуг A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 радиусом r и дуг B_1A_3, B_3A_2, B_2A_1 радиусом R, центры которых находятся в вершинах правильного треугольника $O_1O_2O_3$. Легко видеть, что ширина этой кривой одинакова во всех направлениях и равна $R + r$. Следовательно, катки, профили которых очерчены по таким кривым (рис.2), будут работать ничуть не хуже круглых.

Кривую, изображенную на рисунке 1, можно получить так. Возьмем отрезок A_1B_3 и, повернув его на 60° вокруг точки O_1, переведем в положение B_1A_2. Затем, повернув отрезок B_1A_2 на 60°

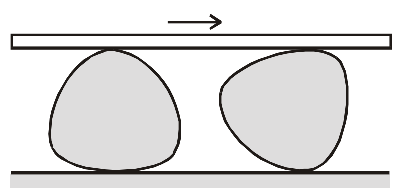

Рис. 2

вокруг точки O_2, получим отрезок A_3B_2, и, наконец, повернув отрезок A_3B_2 на 60° вокруг точки O_3, вновь придем к отрезку A_1B_3. В процессе этих поворотов один конец рассматриваемого отрезка опишет дугу $A_1B_1A_3B_3$, а другой – дугу $B_3A_2B_2A_1$. Следовательно, кривую, показанную на рисунке 1, можно рассматривать как траекторию, описываемую концами некоторого отрезка при трех поворотах вокруг точек, лежащих на этом отрезке.

Пользуясь этим методом, можно получить много кривых подобного

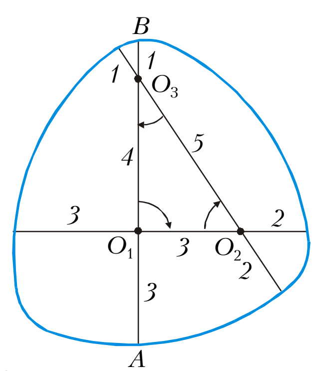

Рис. 3

рода. Например, кривая, показанная на рисунке 3, образуется в результате поворотов отрезка AB вокруг центров O_1, O_2, O_3. Величина и направление каждого поворота показаны стрелками. Цифры на рисунке показывают длины соответствующих отрезков. Ширина всех этих кривых постоянна и равна длине поворачиваемого отрезка. Можно поворачивать отрезок вокруг одного из его концов. Так мы

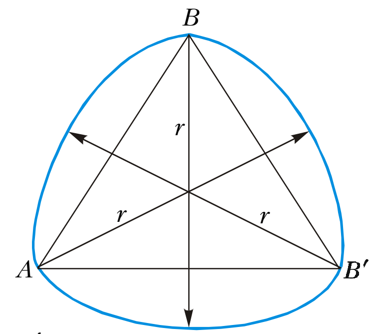

Рис. 4

получим простейшую кривую равной ширины, отличную от окружности (рис.4). При этом отрезок AB поворачивается сначала вокруг точки A, переходя в положение AB', затем вокруг точки B', переходя в отрезок $B'B$, и, наконец, вокруг точки B, замыкая кривую.

Рассмотрим теперь некоторый отрезок AB. Пусть он катится без скольжения по кривой SS (рис.5). Тогда в каждый отдельный момент такое дви-

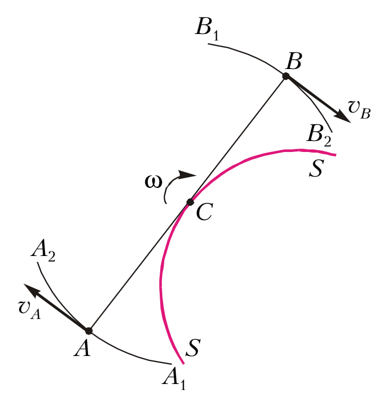

Рис. 5

жение можно рассматривать как вращение отрезка относительно точки касания. Точка касания, относительно которой в данный момент совершается поворот, называется мгновенным центром вращения. В нашем случае – это точка C. Представление о мгновенном центре вращения позволяет легко вычислять скорости различных точек отрезка AB. Например, для скоростей точек A и B будем иметь

$$v_A = \omega \cdot CA, \quad v_B = \omega \cdot CB,$$

где ω – угловая скорость отрезка AB в его мгновенном вращении вокруг центра C. При этом скорости рассматриваемых точек будут перпендикулярны соответствующим радиусам вращения, т.е. отрезкам CA и CB. Таким образом можно вычислить скорость любой точки, лежащей на этом отрезке или жестко связанной с этим отрезком. Если, например, с отрезком AB жестко связана некоторая фигура, то скорость любой ее точки P равна произведению $\omega \cdot CP$.

Вернемся теперь к кривым постоянной ширины. Пусть отрезок AB катится по кривой SS. Так как скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ перпендикулярны радиусам CA и CB, то они параллельны между собой. Но скорость $\vec{v}_A$ направлена по касательной к траектории точки A, а скорость $\vec{v}_B$ – по касательной к траектории точки B. Следовательно, эти касательные параллельны друг другу, и расстояние между ними все время остается равным AB. Но это значит, что траектории A_1A_2 и B_1B_2 можно рассматривать как участки некоторой кривой постоянной ширины.

Однако нам нужно построить не два участка, а всю такую кривую. Если мы хотим сделать это с помощью описываемой операции, то должны выбрать линию SS так, чтобы, обкатывая ее, отрезок AB повернулся на 180°, т.е. чтобы точка A пришла в положение B, а точка B – в положение A. Одна из таких линий – $PQRP$ – показана на рисунке 6. Проследим более подробно, как отрезок AB обкатывает ее.

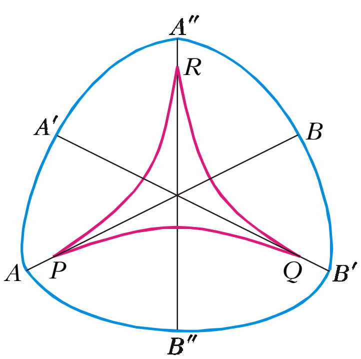

Рис. 6

Сначала он катится по участку PQ и приходит в положение $A'B'$, при этом его концы описывают дуги AA' и BB'. Затем он катится по участку QR, и его концы описывают дуги $A'A''$ и $B'B''$. Наконец, он обкатывает участок RP, а его концы движутся по дугам $A''B$ и $B''A$. В результате точка A приходит в положение B, а точка B – в положение A, и кривая постоянной ширины замыкается. При этом дуги PQ, QR и RP могут иметь любую форму и не обязательно должны быть одинаковыми. Единственное, что от них требуется, – это чтобы они были выпуклыми и касались друг друга так, как это показано на рисунке 6. Что касается отрезков AP и PB, то их длина не может быть произвольной, ибо тогда дуга, описываемая точкой A, не вольется в дугу, описываемую точкой B. Здесь можно поступить следующим образом. Проведем через точку P прямую, касающуюся дуги PQ, и поставим на ней точку A. Заставим теперь эту прямую обкатывать линию $PQRP$. Тогда конец дуги, которую опишет при этом точка A, определит положение точки B.

Линия $PQRP$, показанная на рисунке 6, состоит из трех дуг. Но число дуг может быть и большим. Например, на

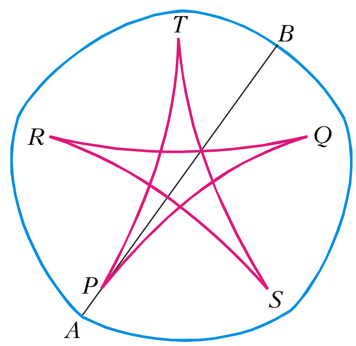

Рис. 7

рисунке 7 изображена кривая постоянной ширины, полученная при обкатывании линии $PQRSTP$, состоящей из пяти дуг.

Кривые постоянной ширины обладают еще одним свойством, роднящим их с окружностью: периметр кривой постоянной ширины равен $l = \pi D$, где D – ширина этой кривой. Действительно, пусть горизонтальная прямая PQ перемещается с помощью катков постоянной ширины (рис.8). Рассмотрим один из этих катков, например

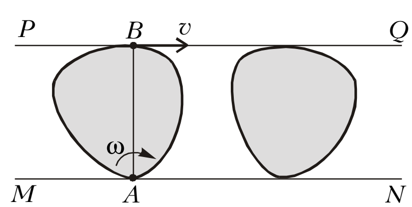

Рис. 8

левый. Пусть его ширина D, а периметр l. Когда прямая PQ передвинется настолько, что этот каток сделает один оборот, он сместится относительно прямой MN на расстояние l вправо. А так как он катится не только по прямой MN, но и по прямой PQ, то после одного оборота он окажется смещенным относительно прямой PQ на расстояние l влево. Следовательно, перемещение прямой PQ относительно прямой MN будет равно $2l$. А так как это же смещение равно vt, где t – время, за которое каток делает один оборот, то

$$2l = vt.$$

(Мы считаем, что прямая PQ движется с постоянной скоростью.) Мгновенный центр вращения катка находится в точке A, значит, скорость перемещения равна

$$v = \omega \cdot AB = \omega D,$$

где ω – угловая скорость катка. Тогда

$$2l = \omega D t.$$

Но ωt есть угол поворота катка за один оборот, следовательно,

$$\omega t = 2\pi, \text{ и } 2l = 2\pi D,$$

откуда

$$l = \pi D.$$

Таким образом, периметр кривой постоянной ширины вычисляется так же, как периметр окружности. А какова площадь, ограниченная кривой постоянной ширины? Можно ли ее вычислять так же, как площадь круга? Оказывается, нет. Однако площадь кольца постоянной ширины можно вычислять, как площадь кольца между двумя концентрическими окружностями.

Рассмотрим кривую постоянной ширины. Через произвольную точку на ней проведем нормаль (нормалью называется прямая, перпендикулярная касательной) и отложим вдоль нее отрезок заданной длины. Отложив такие отрезки от каждой точки данной кривой, получим новую кривую, являющуюся геометрическим местом концов отложенных отрезков. Очевидно, она тоже будет иметь постоянную ширину. При этом площадь, заключенная между этими кривыми, будет равна разности площадей фигур, ограниченных наружной и внутренней кривыми.

Попробуйте доказать это самостоятельно.