рой группе депутатов перейти в другую партию, при этом все депутаты, знакомые хотя бы с одним из депутатов группы, тоже меняют свою партийную принадлежность. Докажите, что президент может добиться того, чтобы все без исключения депутаты Альтернативии перешли в ту партию, которую поддерживает он сам. (Президент не является членом парламента.) (10)

С.Берлов

17. Для любых натуральных чисел $n > m$ докажите неравенство

$$[m, n] + [m+1, n+1] > \frac{2mn}{\sqrt{n-m}},$$

где $[x, y]$ – наименьшее общее кратное чисел x и y. (11)

А.Голованов

18. Найдите все такие функции $f: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$, что для любых целых x и y выполняется соотношение $f(x + y + f(y)) = f(x) + 2y$. (11)

Ф.Петров

19. Из таблицы 20×20 вырезали прямоугольники 1×20, 1×19, …, 1×1. Докажите, что наибольшее количество прямоугольников 1×2, которое заведомо можно вырезать из оставшейся части таблицы, равно 85. (11)

С.Берлов, А.Храбров

Отборочный тур

20. На доске написано натуральное число. Два игрока ходят по очереди, и каждый своим ходом заменяет написанное на доске число n числом $n-1$ или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Выигрывает тот, кто первым напишет на доске число 1. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер, если в начале игры число на доске равно 1000000? (9–10)

О.Ванюшина

21. В шахматном клубе посетители могут играть в шахматы друг с другом или с компьютером. Вчера в клубе было n человек, каждый из них сыграл не более n партий, и любые двое, не игравшие друг с другом, сыграли в сумме не более n партий. Докажите, что всего было сыграно не более $\frac{n(n+1)}{2}$ партий. (9–10)

А.Федотов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №4)

1. Из условия задачи следует, что стоимость всей покупки в центах должна делиться на 3. Но 2000 на три не делится, следовательно, дядюшка Скрудж должен получить сдачу.

2. В каждой из четырех отмеченных вершин куба (рис.1) должно сходиться по 3 разноцветных ребра, так что ребер каждого цвета должно быть не менее четырех. Но и не более четырех, поскольку у куба всего 12 ребер. Одна из возможных раскрасок показана на рисунке 2 (параллельные ребра окрашены одним цветом).

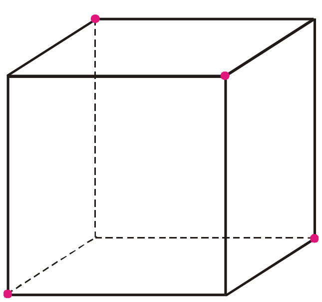

Рис. 1

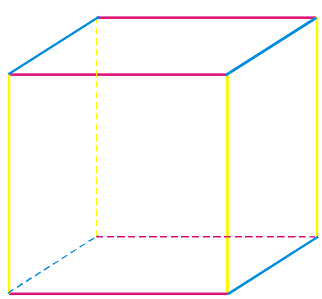

Рис. 2

3. Удовлетворяющие условию задачи девять последовательных чисел будем искать среди чисел вида $\overline{ab(c-4)}$, $\overline{ab(c-3)}$, $\overline{ab(c-2)}$, $\overline{ab(c-1)}$, $\overline{abc}$, $\overline{ab(c+1)}$, $\overline{ab(c+2)}$, $\overline{ab(c+3)}$, $\overline{ab(c+4)}$, где a, b, c – некоторые ненулевые цифры. Сумма произведений цифр этих чисел равна

$$ab\big((c-4)+(c-3)+(c-2)+(c-1)+$$
$$+c+(c+1)+(c+2)+(c+3)+(c+4)\big) = 9abc.$$

Приравняв ее к числу $1125 = 9 \cdot 5^3$, находим

$$a = b = c = 5.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют девять последовательных чисел: 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559.

4. На рисунке 3 показаны два равных правильных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, а также прямые Π_1 и Π_2, обладающие требуемыми свойствами. Треугольник $A_1B_1C_1$ симметричен треугольнику ABC относительно прямой Π_2. Прямая Π_2 пересекает стороны треугольника ABC в точках M и N таких, что $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$. Прямая Π_1 проходит через вершину A перпендикулярно прямой Π_2.

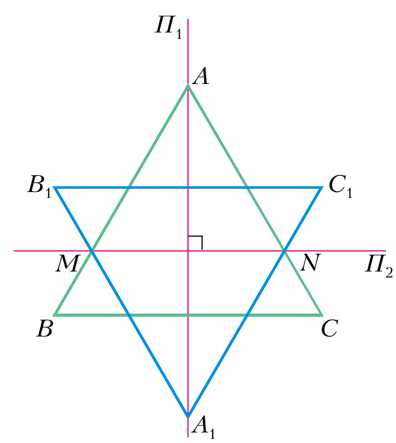

Рис. 3

5. Равенства в первой пирамиде представляют собой частный случай тождества

$$n^2 + (n^2+1) + (n^2+2) + \ldots + (n^2+n) =$$
$$= (n^2+n+1) + (n^2+n+2) + \ldots + (n^2+2n),$$

а равенства во второй пирамиде – частный случай тождества.

$$((1+2n)n)^2 + ((1+2n)n+1)^2 + \ldots + ((1+2n)n+n)^2 =$$
$$= ((1+2n)n+n+1)^2 + ((1+2n)n+n+2)^2 + \ldots + ((1+2n)n+2n)^2,$$

где n – натуральное.

Справедливость этих тождеств проверьте самостоятельно.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. От гладкой поверхности воды свет фар отражается зеркально, т.е. вперед, а от шероховатой дороги – рассеянно,