

рой группе депутатов перейти в другую партию, при этом все депутаты, знакомые хотя бы с одним из депутатов группы, тоже меняют свою партийную принадлежность. Докажите, что президент может добиться того, чтобы все без исключения депутаты Альтернативии перешли в ту партию, которую поддерживает он сам. (Президент не является членом парламента.) (10)

*С.Берлов*

17. Для любых натуральных чисел  $n > m$  докажите неравенство

$$[m, n] + [m + 1, n + 1] > \frac{2mn}{\sqrt{n - m}},$$

где  $[x, y]$  – наименьшее общее кратное чисел  $x$  и  $y$ . (11)

*А.Голованов*

18. Найдите все такие функции  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , что для любых целых  $x$  и  $y$

выполняется соотношение  $f(x + y) + f(y) = f(x) + 2y$ . (11)

*Ф.Петров*

19. Из таблицы  $20 \times 20$  вырезали прямоугольники  $1 \times 20$ ,  $1 \times 19$ , ...,  $1 \times 1$ . Докажите, что наибольшее количество прямоугольников  $1 \times 2$ , которое заведомо можно вырезать из оставшейся части таблицы, равно 85. (11)

*С.Берлов, А.Храбров*

### Отборочный тур

20. На доске написано натуральное число. Два игрока ходят по очереди, и каждый своим ходом заменяет написанное на доске число  $n$  числом  $n - 1$  или  $\left[ \frac{n+1}{2} \right]$  (квадратные скобки обозначают целую часть). Выигрывает тот, кто первым напишет на доске

число 1. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер, если в начале игры число на доске равно 1000000? (9–10)

*О.Ванюшина*

21. В шахматном клубе посетители могут играть в шахматы друг с другом или с компьютером. Вчера в клубе было  $n$  человек, каждый из них сыграл не более  $n$  партий, и любые двое, не игравшие друг с другом, сыграли в сумме не более  $n$  партий. Докажите, что всего было сыграно не более  $\frac{n(n+1)}{2}$  партий. (9–10)

*А.Федотов*

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

### «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» №4)

1. Из условия задачи следует, что стоимость всей покупки в центах должна делиться на 3. Но 2000 на три не делится, следовательно, дядюшка Скрудж должен получить сдачу.

2. В каждой из четырех отмеченных вершин куба (рис.1) должно сходиться по 3 разноцветных ребра, так что ребер каждого цвета должно быть не менее четырех. Но и не более четырех, поскольку у куба всего 12 ребер. Одна из возмож-

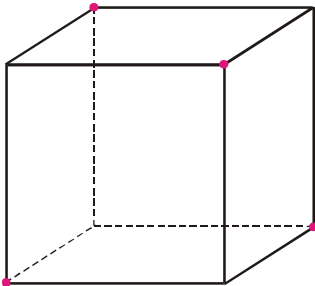


Рис. 1

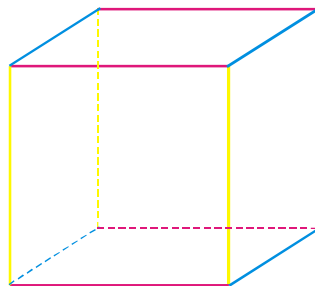


Рис. 2

ных раскрасок показана на рисунке 2 (параллельные ребра окрашены одним цветом).

3. Удовлетворяющие условию задачи девять последовательных чисел будем искать среди чисел вида  $\overline{ab(c-4)}$ ,  $\overline{ab(c-3)}$ ,  $\overline{ab(c-2)}$ ,  $\overline{ab(c-1)}$ ,  $\overline{abc}$ ,  $\overline{ab(c+1)}$ ,  $\overline{ab(c+2)}$ ,  $\overline{ab(c+3)}$ ,  $\overline{ab(c+4)}$ , где  $a, b, c$  – некоторые ненулевые цифры. Сумма произведений цифр этих чисел равна

$$ab((c-4) + (c-3) + (c-2) + (c-1) + c + (c+1) + (c+2) + (c+3) + (c+4)) = 9abc.$$

Приравняв ее к числу  $1125 = 9 \cdot 5^3$ , находим

$$a = b = c = 5.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют девять последовательных чисел: 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559.

4. На рисунке 3 показаны два равных правильных треугольника  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , а также прямые  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , обладающие требуемыми свойствами. Треугольник  $A_1B_1C_1$  симметричен треугольнику  $ABC$  относительно прямой  $\Pi_2$ . Прямая  $\Pi_2$  пересекает стороны треугольника  $ABC$  в точках  $M$  и  $N$

таких, что  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$ . Прямая  $\Pi_1$  проходит через вершину  $A$  перпендикулярно прямой  $\Pi_2$ .

5. Равенства в первой пирамиде представляют собой частный случай тождества

$$\begin{aligned} n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n^2 + n) &= \\ &= (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \dots + (n^2 + 2n), \end{aligned}$$

а равенства во второй пирамиде – частный случай тождества.

$$\begin{aligned} ((1+2n)n)^2 + ((1+2n)n+1)^2 + \dots + ((1+2n)n+n)^2 &= \\ = ((1+2n)n+n+1)^2 + ((1+2n)n+n+2)^2 + \dots + ((1+2n)n+2n)^2, \end{aligned}$$

где  $n$  – натуральное.

Справедливость этих тождеств проверьте самостоятельно.

### Калейдоскоп «Кванта»

#### Вопросы и задачи

1. От гладкой поверхности воды свет фар отражается зеркально, т.е. вперед, а от шероховатой дороги – рассеянно,

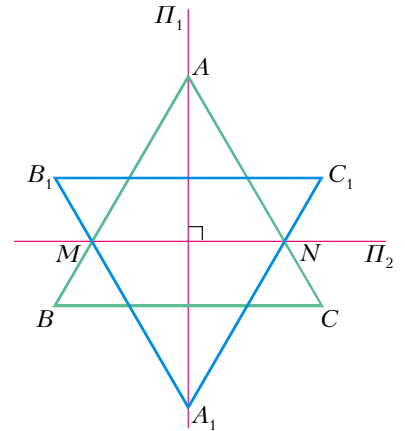


Рис. 3